



Шабанов Александр Петрович родился в 1955 г. В 1977 г. окончил самолетостроительный факультет Новосибирского электротехнического института по специальности «Динамика и прочность машин». В СГУПСе работает с 1977 г. Кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики. Область научных интересов — экспериментальные методы механики деформируемого твердого тела. Автор более пятидесяти научных трудов.

УДК 620.178.3

А.П. ШАБАНОВ

КИНЕТИКА УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

Представлен анализ механизма развития усталостной трещины, в основу которого положено исследование изменения радиуса кривизны вершины дефекта в процессе циклического нагружения образца. Получены зависимости, связывающие механические характеристики материала, геометрию трещины и скорость ее роста при усталостном нагружении конструкции.

1. Исходные положения

1. Рассматривается пластичный материал, имеющий диаграмму растяжения, которую после идеализации можно представить как диаграмму Прандля (рис. 1) со следующими параметрами:

σ_T — предел текучести материала; ϵ_T — деформации, соответствующие пределу текучести; ϵ_B — предельная деформация; $\sigma_B = \sigma_T$ — значения предела прочности и текучести совпадают; E — модуль продольной упругости.

2. Материал образца — однородный и изотропный.

3. Образец находится в условиях плоского напряженного состояния.

4. Материал образца относится к классу циклически стабильных. Поэтому в процессе циклического нагружения показатели пределов текучести и модулей упругости при растяжении и сжатии имеют одинаковые значения и в процессе циклического нагружения не меняются, не изменяется величина предельной деформации ϵ_B .

5. Характерные размеры концентраторов (радиусы кривизны в зонах концентрации деформаций) много меньше габаритных размеров образца, и как следствие — размеры пластических зон, возникающих в зонах, примыкающих к вершинам концентраторов, много меньше размеров упругих областей образца.

6. Жесткость материала, расположенного в упругой части образца, много больше жесткости материала, находящегося в пластической области, непосредственно примыкающей к вершине трещины. По этой причине будем считать, что деформирование пластической зоны со стороны упругой части материала осуществляется по типу жесткого нагружения.

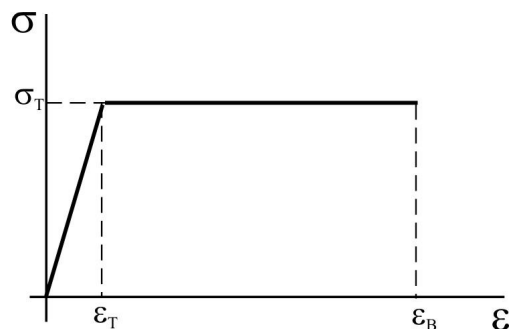


Рис. 1

7. Образец нагружается циклическими напряжениями на бесконечности, направленными перпендикулярно большой полуоси дефекта. Максимальные напряжения цикла нагружения — $\sigma_{\max}$, минимальные — $\sigma_{\min}$. При этом абсолютная величина внешних напряжений не превосходит значения предела пропорциональности (текучести) материала.

8. Циклическое нагружение образца на каждом полупериоде внешней нагрузки будем моделировать последовательным приложением растягивающих (в процессе роста нагрузки) и сжимающих (в процессе уменьшения) напряжений на бесконечности, равных по величине $(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$. Исследуются изменения напряженно-деформированного состояния области, примыкающей к вершине дефекта, на приращении внешней нагрузки от напряжений $\sigma_{\min}$ до $\sigma_{\max}$ при нагружении и от напряжений $\sigma_{\max}$ до $\sigma_{\min}$ при разгрузке.

9. При растяжении образца деформации в любой его точке не могут превосходить значение ε_b (т. е. разрушение материала происходит в момент, когда деформации превышают значение ε_b); при сжатии — величина деформации неограниченна.

10. Анализируется установившийся процесс разрушения. Геометрия трещины и напряженно-деформированное состояние материала в вершине дефекта сформировались в результате предыдущего продолжительного циклического нагружения образца. Механизм старта трещины не рассматривается.

2. Упругопластическое деформирование трещиновидных дефектов

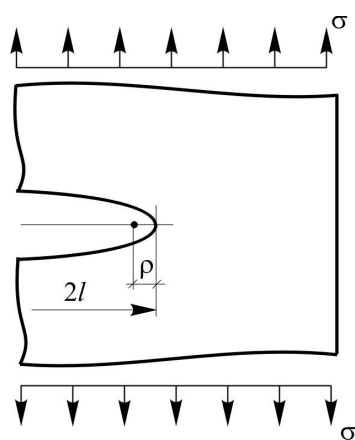


Рис. 2

Рассмотрим процесс нагружения образца, выполненного из материала, диаграмма которого представлена на рис. 1. Пусть изначально образец имеет трещиновидный дефект длиной $2l$ с радиусом кривизны в вершине ρ (рис. 2). На прямом ходе нагружения (в процессе роста величины внешних напряжений до уровня $\sigma_{\max}$) в точке, расположенной в вершине дефекта, происходит рост деформаций.

Соотнесем между собой уровень внешних напряжений и величину пластических деформаций в вершине дефекта. Для этого запишем на контуре отверстия коэффициенты концентрации напряжений:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{\text{ном}}} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{ном}}}$$

и деформаций

$$k_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ном}}},$$

которые связаны между собой соотношением [1]

$$k_{\text{упр}}^2 = k_{\sigma} k_{\varepsilon}. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{\text{ном}}$ и $\varepsilon_{\text{ном}}$ — соответственно номинальные напряжения и деформации, действующие в невозмущенной части образца, связанные между собой очевидным равенством: $\sigma_{\text{ном}} = E\varepsilon_{\text{ном}}$; σ и ε — напряжения и деформации в вершине дефекта; $k_{\text{упр}}$ — коэффициент концентрации напряжений на контуре отверстия в предположении, что материал образца деформируется абсолютно упруго:

$$k_{\text{упр}} = \frac{\sigma_{\text{упр}}}{\sigma_{\text{ном}}}.$$

Выражение (1) будет положено в основу дальнейших рассуждений, поэтому требуется дополнительное его обоснование. Г. Нейбер записал это соотношение для любого материала, деформирующегося по нелинейному закону, для призматического стержня с гиперболическим концентратором, испытывающего антиплоский сдвиг (нагружение трещины по моде K_{III}). Автор предположил, что это соотношение будет справедливо и для других типов концентраторов и видов нагружения. Экспериментальную проверку равенства (1) с использованием метода фотоупругих покрытий уже для осевого растяжения прямоугольной полосы с круговым отверстием, изготовленной из алюминиевого сплава Д16Т, выполнил М.Х. Ахметзянов. Эти эксперименты дали практически идеальное выполнение формулы (1) с теоретическим значением [2]. Аналогичная задача: растяжение прямоугольной полосы с круговым отверстием (материал — сплав Д16Т) за границами предела текучести — решалась численно [3]. Результаты расчета — величины концентрации напряжений и деформаций — подставили в правую часть уравнения (1) и сравнили со справочным коэффициентом концентрации при упругом растяжении [4]. Погрешность составила 5,32 %, что является хорошим совпадением для конечноэлементной реализации упругопластической задачи. Все это позволяет сделать вывод, что формула (1) может быть использована для анализа напряженно-деформированного состояния в вершинах трещиновидных дефектов, как это сделано, в частности, в работе [5].

Перепишем теперь равенство (1) с учетом принятых выше обозначений:

$$\left[\frac{\sigma_{\text{упр}}}{\sigma_{\text{ном}}} \right]^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{ном}}} \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{ном}}} = \frac{E \sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{ном}}^2} \varepsilon = \frac{\sigma_{\text{т}}^2}{\sigma_{\text{ном}}^2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{т}}}.$$

В результате получаем условие, связывающее значение упругопластической деформации на контуре отверстия и упругие напряжения, которые действовали бы в той же точке вершины трещины в предположении, что материал образца деформируется абсолютно упруго:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{т}}} = \left[\frac{\sigma_{\text{упр}}}{\sigma_{\text{т}}} \right]^2. \quad (2)$$

Примем в качестве гипотезы следующее утверждение. *Перемещения точек, расположенных на берегах трещины, происходят строго в направлении действия внешней нагрузки, т. е. перпендикулярно направлению большой полуоси трещины.*

Эта гипотеза косвенно подтверждается упругим решением Вестергарда. Известные асимптотические решения для математического разреза [6] в случае нагружения по моде K_I для перемещений представляются в виде:

$$u = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right);$$

$$v = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Здесь v — перемещение вдоль действия нагрузки; u — перемещение перпендикулярно направлению нагрузки; r , θ — координаты произвольной

точки образца в полярной системе координат; G , ν — упругие постоянные материала.

Горизонтальная компонента u полного перемещения точек, расположенных на берегах трещины (для которых $\theta = 180^\circ$), равна нулю, и отлична от нуля только вертикальная компонента v .

Выделим в вершине ненагруженной трещины бесконечно малый элемент dS_1 (рис. 3). Далее будем увеличивать уровень внешней нагрузки. В результате этого трещина раскрывается — ее берега начнут расходиться. Размер dS_1 настолько мал, что деформацию в пределах рассматриваемого элемента можно считать постоянной в процессе всего роста внешней нагрузки. При этом в вершине трещины наряду с ростом уровня деформаций происходит увеличение радиуса кривизны — трещина затупляется. Точка C , расположенная на границе рассматриваемого элемента, переместится в вертикальном направлении в положение C_1 . Зафиксируем вершину дефекта в этот момент. Длина рассматриваемого элемента составит dS_2 , а радиус кривизны вершины $\rho = \rho_2$. На рис. 3 показан вид вершины трещины в начале и конце нагружения. Длина отрезка AB :

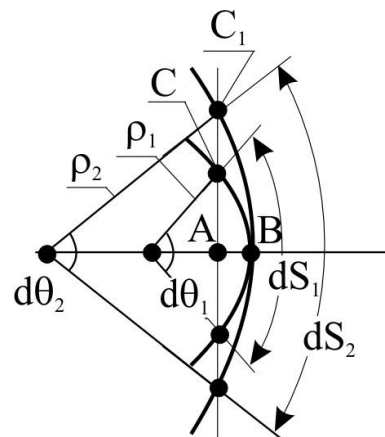


Рис. 3

$$\rho_1 \left(1 - \cos \frac{d\theta_1}{2} \right) = \rho_2 \left(1 - \cos \frac{d\theta_2}{2} \right).$$

Раскладывая далее косинус в ряд Тейлора и пренебрегая малыми высших порядков ($d\theta \ll 1$), получаем

$$\rho_1 d\theta_1^2 \approx \rho_2 d\theta_2^2. \quad (3)$$

Запишем теперь длины дуг:

$$\begin{aligned} dS_1 &= \rho_1 d\theta_1, \\ dS_2 &= \rho_2 d\theta_2 = dS_1 + \Delta dS_1 = dS_1(1 + \varepsilon), \end{aligned}$$

здесь $\varepsilon = \frac{\Delta dS_1}{dS_1}$ — деформация, которую испытывает элемент в процессе раскрытия трещины. С учетом соотношения (3) радиус кривизны вершины трещин в конце этапа нагружения можно представить:

$$\rho_2 = \rho_1(1 + \varepsilon)^2. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь циклическое нагружение трещиновидного дефекта. На прямом ходе нагружения (в процессе роста величины внешних напряжений до уровня $\sigma_{\max}$) в точке, расположенной в вершине трещины, происходит рост деформаций. При определенном уровне максимальных напряжений цикла эти деформации достигают уровня ε_b . В процессе дальнейшего роста внешней нагрузки (при условии, что материал образца является абсолютно прочным) напряженно-деформированное состояние точки, расположенной в вершине трещины на кривой деформирования (рис. 4), описывалось бы точкой K . Реально, поскольку деформации $\varepsilon_{(2)} > \varepsilon_b$, часть материала, расположенного перед фронтом трещины, будет разрушена. Это приводит к дальнейшему затуплению кончика трещины и уменьшению уровня деформации до значения ε_b . В итоге напряженно-деформированное состояние в вершине подросшей трещины будет описываться точкой B .

На обратном ходе цикла нагружения (внешняя нагрузка уменьшается до значения $\sigma_{\min}$) происходит разгрузка материала, расположенного в вершине дефекта. И если в результате этого процесса его напряженно-деформированное состояние будет описываться любой точкой, расположенной на прямой BD , последующий рост внешней нагрузки на следующем цикле нагружения до значения $\sigma_{\max}$ не приведет к росту усталостной трещины. Действительно, в этом случае при дальнейшем нагружении образца от напряжений $\sigma_{\min}$ до напряжений $\sigma_{\max}$ деформирование материала, образующего кончик трещины, будет упругим: напряженно-деформированное состояние точки, расположенной в вершине дефекта, будет описываться прямой BD , и никогда деформации не будут превосходить значения ε_B .

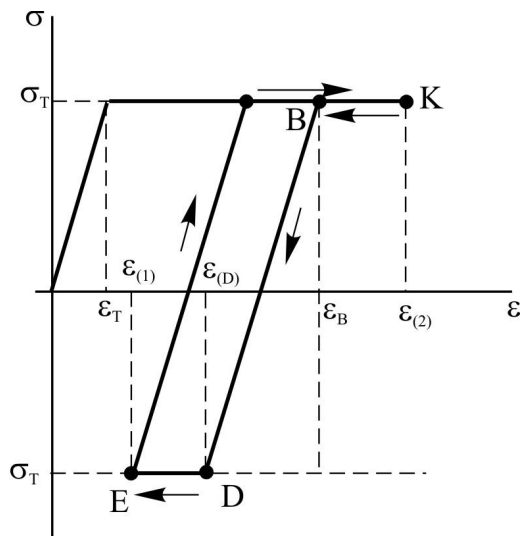


Рис. 4

Следовательно, если оставаться в рамках выбранного критерия разрушения, для роста усталостной трещины необходимо выполнение двух условий.

Первое: на прямом ходе цикла нагружения деформация в вершине дефекта должна превосходить предельное значение ε_B .

Второе: на обратном ходе нагружения в области образца, примыкающей к кончику трещины, непременно должна наблюдаться обратная пластичность — деформация в вершине дефекта должна достичь значения $\varepsilon_{(1)} < \varepsilon_{(D)}$ (см. рис. 4).

3. Циклическое нагружение образца

Рассмотрим образец, который находится под действием циклической нагрузки, имеющей параметры: максимальные напряжения цикла — $\sigma_{\max}$, минимальные напряжения — $\sigma_{\min}$. Пусть в начале очередного цикла нагружения (при $\sigma_{\text{ном}} = \sigma_{\min}$) образец имеет трещиновидный дефект длиной $2l$ с радиусом кривизны в вершине ρ_1 .

Прямой ход цикла нагружения: внешние напряжения растут от значения $\sigma_{\min}$ до $\sigma_{\max}$.

В начале прямого хода напряженно-деформированное состояние точки, расположенной в вершине трещины, на диаграмме растяжения описывается точкой E (рис. 5): напряжение равно $-\sigma_T$, деформация — $\varepsilon_{(1)}$, радиус кривизны в вершине равен ρ_1 , уровень внешних напряжений составляет $\sigma_{\min}$.

Отметим прежде, что равенство (2) справедливо, если при нулевых напряжениях деформации также равны нулю. По этой причине начало координат поместим в точку O . В этой системе координат абсцисса $\tilde{\varepsilon}$ связана с деформацией ε условием

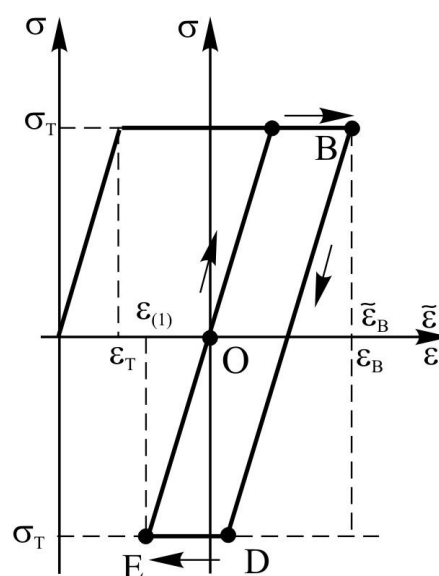


Рис. 5

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - (\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_T)$$

и в дальнейшем равенство (2) будем записывать в виде:

$$\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_T} = \left[\frac{\sigma_{\text{упр}}}{\sigma_T} \right]^2. \quad (5)$$

Предельный уровень деформаций в этой системе координат обозначим как $\tilde{\varepsilon}_B$.

Первая фаза роста трещины. Первоначально в процессе роста уровня внешней нагрузки одновременно происходит увеличение радиуса кривизны вершины трещины от значения ρ_1 до некоторого значения ρ_B и рост уровня деформаций в вершине дефекта без увеличения ее длины. Радиус ρ_B определим, как некоторое значение, по достижении которого деформации в вершине трещины достигают предельного уровня ε_B (или $\tilde{\varepsilon}_B$), который можно определить, используя равенство (4):

$$\rho_B = \rho_1(1 + \tilde{\varepsilon}_B)^2.$$

Дальнейший рост радиуса кривизны вершины трещины ρ за счет увеличения длины дуги в ее вершине невозможен.

Вторая фаза роста трещины. Увеличение радиуса кривизны вершины трещины за счет увеличения длины трещины. Этот процесс иллюстрирован на рис. 6–7.

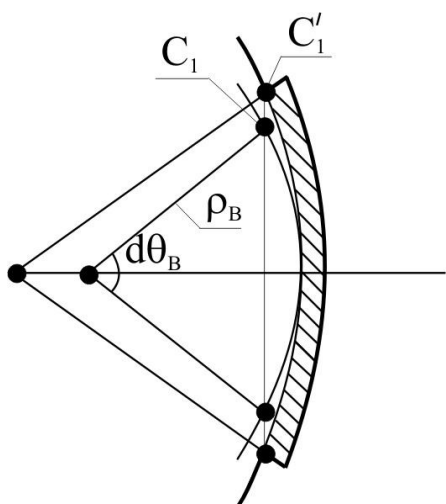


Рис. 6

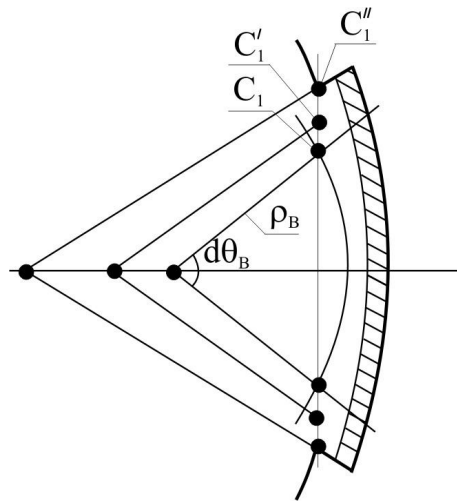


Рис. 7

Вследствие того, что нагружение вершины дефекта рассматривается как жесткое, прослеживая перемещение точки C , отметим следующие этапы.

- Начало второй фазы. Внешние напряжения, действующие на образец с трещиной, таковы, что точка C находится в положении C_1 . Деформация в бесконечно малом элементе равна предельному значению $\tilde{\varepsilon}_B$. Разрушение материала образца не происходит.

- Происходит рост внешней нагрузки на малую величину $\Delta\sigma$. Это приводит к тому, что точка C перемещается на бесконечно малое расстояние и занимает положение C'_1 (см. рис. 6). При этом деформация в вершине дефекта превысит предельный уровень, что приведет к разрушению материала, расположенного в вершине трещины. Эта часть образца заштрихована (см. рис. 6). Будем считать, что этот материал «разрыхлился» — его просто не стало. В результате вершина трещины продвинется вперед, а радиус кривизны кончика трещины увеличится,

что приведет к уменьшению концентрации деформаций и, следовательно, в точках вновь образованной вершины дефекта уровень деформаций не будет превышать предельных.

- Дальнейший рост уровня внешней нагрузки на величину $\Delta\sigma$ приведет к тому, что точка C переместится в новое положение C_1'' (см. рис. 7). Снова деформации в вершине дефекта превысят предельный уровень, за этим последует дальнейшее разрушение материала образца (заштрихованная область на рис. 7). Это в свою очередь приведет к увеличению длины трещины, увеличению радиуса кривизны и к уменьшению уровня деформаций на кончике дефекта до значения $\tilde{\varepsilon}_B$.

- И так далее, до тех пор, пока точка C не займет положение C_2 , в которое она переместится после того, как внешние напряжения достигнут максимального значения: $\sigma = \sigma_{\max}$. При этом в результате многочисленных разрушений на элементарных актах пригрузки длина трещины увеличится на величину dl , на ту же величину увеличится радиус кривизны вершины дефекта (рис. 8).

Обычно, если материал образца «работает» за пределом текучести, принцип суперпозиции неприменим. Однако в данном случае его использование правомочно. Так как нагружение трещины «жесткое», геометрия вершины трещины (положение точек C_2 и C_3) будет неизменной, независимо от особенностей процесса разрушения, протекающего в ходе роста внешней нагрузки до уровня $\sigma_{\max}$: происходят ли последовательные разрывы волокон, расположенных в вершине дефекта, или же первоначально точка C перемещается в положение C_2 и лишь затем разрушается часть материала шириной dl (см. рис. 8). С учетом этого обстоятельства первоначально определим значение деформации $\tilde{\varepsilon}_{\max}$, которая возникнет в области, примыкающей к вершине дефекта, при нагружении образца внешними напряжениями от уровня $\sigma_{\min}$ до уровня $\sigma_{\max}$ (при условии, что материал не разрушается). Запишем величину упругих напряжений в вершине трещины:

$$\sigma_{\text{упр}} = k_{\text{упр}} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) - \sigma_{\text{т}} = k_{\text{упр}} \sigma_{\max} (1 - r) - \sigma_{\text{т}}.$$

Коэффициент концентрации $k_{\text{упр}}$ определим по формуле, данной в работе [7], с учетом того, что $l \gg \rho_1$:

$$k_{\text{упр}} = 1 + 2\sqrt{\frac{l}{\rho_1}} \cong 2\sqrt{\frac{l}{\rho_1}}.$$

Тогда приращение деформаций за полуцикл нагружения от $\sigma_{\min}$ до $\sigma_{\max}$ установим из равенства (5):

$$\tilde{\varepsilon}_{\max} = \varepsilon_{\text{т}} \left[2\sqrt{\frac{l}{\rho_2}} \frac{\sigma_{\max}(1-r)}{\sigma_{\text{т}}} - 1 \right]^2,$$

которое с учетом выражения (4) преобразуется к виду:

$$\tilde{\varepsilon}_{\max} = \left[\frac{\sqrt{\tilde{\varepsilon}}}{1 + \tilde{\varepsilon}_{\max}} - \sqrt{\varepsilon_{\text{т}}} \right]^2. \quad (6)$$

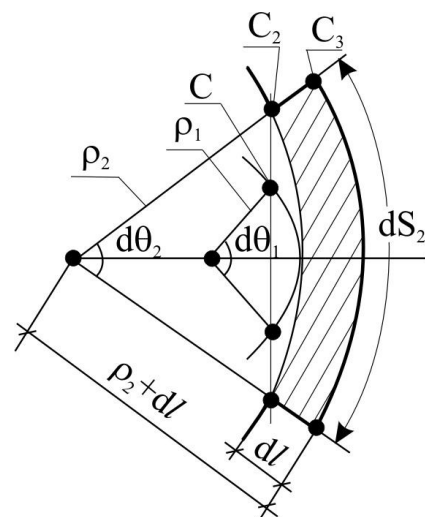


Рис. 8

Здесь обозначено:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_T \left[2 \sqrt{\frac{l}{\rho_1}} \frac{\sigma_{\max}(1-r)}{\sigma_T} \right]^2, \quad (7)$$

где $\bar{\varepsilon}$ — деформация, которая возникла бы в вершине дефекта при нагружении образца от напряжений $\sigma_{\min}$ до $\sigma_{\max}$ в предположении, что радиус кривизны при нагружении не меняется.

Если $\tilde{\varepsilon}_{\max} \leq \tilde{\varepsilon}_B$, то трещина расти не будет. В противном случае произойдет разрушение (разрыхление) части материала, расположенного в вершине дефекта (заштрихованная область на рис. 8). В результате чего радиус кривизны возрастет до значения

$$\rho_2 + dl = \rho_1(1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})^2 + dl,$$

а деформация достигнет предельного уровня, равного $\tilde{\varepsilon}_B$.

С учетом этих соображений запишем равенство (5) в следующем виде:

$$\tilde{\varepsilon}_B = \varepsilon_T \left[2 \sqrt{\frac{l+dl}{\rho_2+dl}} \frac{\sigma_{\max}(1-r)}{\sigma_T} - 1 \right]^2.$$

Откуда после преобразований с учетом того, что $dl \ll l$, получаем значение приращения длины трещины в конце прямого хода цикла нагружения:

$$dl = \rho_1 \left[\frac{\bar{\varepsilon}}{(\sqrt{\tilde{\varepsilon}_B} + \sqrt{\varepsilon_T})^2} - (1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})^2 \right]. \quad (8)$$

Если $\sqrt{\tilde{\varepsilon}_B} \gg \sqrt{\varepsilon_T}$, то

$$dl = \rho_1 \left[\frac{\bar{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}_B} - (1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})^2 \right]. \quad (9)$$

Обратный ход цикла нагружения: внешние напряжения уменьшаются от значения $\sigma_{\max}$ до $\sigma_{\min}$.

Очень важный этап, в ходе которого восстанавливается конфигурация вершины трещины, которую она имела в начале цикла нагружения. В процессе обратного хода (при достижении уровня внешней нагрузки значения $\sigma_{\min}$) в результате пластического деформирования области, примыкающей к кончику трещины, радиус вершины трещины должен уменьшиться и достичь значения, близкого к ρ_1 . Однако, так как деформирование области, примыкающей к вершине трещины жесткое, то отрезок $C_3C'_1$ (рис. 9), на который должна сместиться точка C_3 на обратном ходе цикла нагружения, должен быть равен отрезку, на который сместится точка C на первом полуцикле. По-прежнему действует гипотеза о том, что в процессе нагружения берега трещины перемещаются по линиям, перпендикулярным большой полуоси дефек-

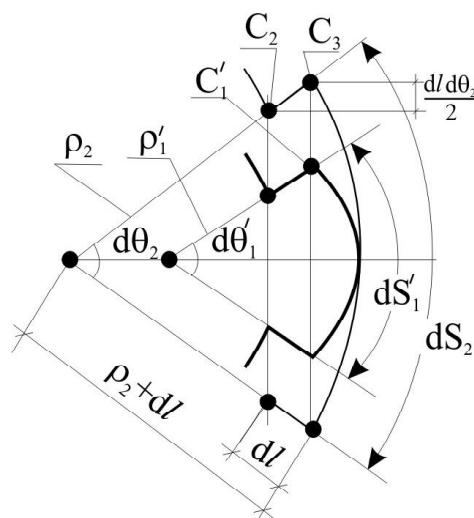


Рис. 9

та. Это обстоятельство позволяет записать условие (3) в виде:

$$\rho_1 d\theta_1^2 = \rho_2 d\theta_2^2 = \rho_1' (d\theta_1')^2.$$

Длину дуги в конце обратного хода цикла нагружения (см. рис. 9) можно определить из выражения:

$$dS_1' = \rho_1' d\theta_1' = \rho_1 d\theta_1 + dl d\theta_2, \quad (10)$$

откуда, пренебрегая малыми высших порядков, получаем радиус кривизны в конце цикла нагружения:

$$\rho_1' = \rho_1 + \frac{2dl}{1 + \tilde{\varepsilon}_{\max}} = \rho_1 \left[1 + \frac{2dl}{\rho_1(1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})} \right]. \quad (10)$$

Таким образом, в процессе полного цикла нагружения радиус кривизны возрастает. При этом добавка $\frac{2dl}{\rho_1(1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})}$ по отношению к единице достаточно мала. Однако при многоцикловой усталости в результате повторных нагружений она может существенно изменить радиус кривизны.

В процессе обратного хода цикла нагружения материал в вершине трещины будет испытывать сжимающие деформации $\tilde{\varepsilon}_{\text{сж}}$. Перепишем соотношение (4) следующим образом:

$$\rho_2 + dl = \rho_1' (1 + \tilde{\varepsilon}_{\text{сж}})^2,$$

которое с учетом выражений (4) и (10) преобразуем к виду:

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{сж}} = \sqrt{\frac{\rho_1(1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})^2 + dl}{\rho_1 + \frac{2dl}{1 + \tilde{\varepsilon}_{\max}}}} - 1.$$

С другой стороны, [см. равенство (5)]

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{сж}} = \varepsilon_{\text{т}} \left[2 \sqrt{\frac{l}{\rho_1'}} \frac{\sigma_{\max}(1 - r)}{\sigma_{\text{т}}} - 1 \right]^2,$$

которое с учетом соотношений (7) и (10) принимает вид:

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{сж}} = \left[\sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{1 + \frac{2dl}{\rho_1(1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})}}} - \sqrt{\varepsilon_{\text{т}}} \right]^2.$$

В итоге получаем систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\rho_1(1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})^2 + dl}{\rho_1 + \frac{2dl}{1 + \tilde{\varepsilon}_{\max}}}} - 1 = \left[\sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{1 + \frac{2dl}{\rho_1(1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})}}} - \sqrt{\varepsilon_{\text{т}}} \right]^2, \\ \frac{dl}{\rho_1} = \left[\frac{\bar{\varepsilon}}{(\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\text{в}}} + \sqrt{\varepsilon_{\text{т}}})^2} - (1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})^2 \right], \end{cases} \quad (11)$$

откуда определяется значение предельной деформации $\tilde{\varepsilon}_{\text{в}}$.

Задача значительно упрощается, если $\frac{2dl}{\rho_1(1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})} \ll 1$. Тогда система уравнений (11) сводится к выражению

$$\tilde{\varepsilon}_b \cong \left[\frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}}}{1 + (\sqrt{\bar{\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon_t})^2} - \sqrt{\varepsilon_t} \right]^2. \quad (12)$$

Дальнейшее упрощение системы (11) возможно, если $\sqrt{\bar{\varepsilon}} \gg \sqrt{\varepsilon_t}$:

$$\tilde{\varepsilon}_b \approx \frac{\bar{\varepsilon}}{(1 + \bar{\varepsilon})^2}. \quad (13)$$

Цикл замкнулся. В начале цикла трещина имела геометрию, которая определяется двумя параметрами: радиусом кривизны r_1 и полудлиной l , а прочность — значением ε_b . В конце цикла нагружения полудлина трещины возросла на величину dl (9), радиус кривизны увеличился на значение $\frac{2dl}{1 + \tilde{\varepsilon}_{\max}}$ (10), предельная деформация также изменилась и определяется из соотношения (11). Эти параметры (ρ , l и $\tilde{\varepsilon}_b$) изменяются от цикла к циклу, что и определяет кинетику роста усталостной трещины.

Подводя итог, перепишем равенство (9) в предположении, что оно описывает подрастание трещины при минимально возможном числе циклов нагружения $dN = 1$, а длина трещины равна $2l$:

$$\frac{d(2l)}{dN} = 2\rho_1 \left[\frac{\bar{\varepsilon}}{(\sqrt{\tilde{\varepsilon}_b} + \sqrt{\varepsilon_t})^2} - (1 + \tilde{\varepsilon}_{\max})^2 \right]. \quad (14)$$

Рассмотренная модель позволяет объяснить с позиций классической механики сплошного однородного континуума процесс формирования усталостной трещины. Основной причиной развития усталостных повреждений является изменение концентрации упругопластических деформаций в вершине трещины в ходе циклического нагружения образца. На прямом ходе нагружения происходит увеличение упругопластических деформаций, что приводит к увеличению радиуса кривизны в вершине трещины. Пока уровень упругопластических деформаций меньше предельного значения для данного материала трещина не растет. Если в ходе дальнейшего роста внешней нагрузки деформации в кончике трещины превзойдут предельный уровень, увеличение радиуса кривизны (а значит, уменьшение коэффициента концентрации деформаций) возможно только за счет разрушения части материала образца, расположенного непосредственно перед вершиной трещины: произойдет ее подрастание. В результате этого сформируется такая геометрия вершины дефекта, которая обеспечит уровень упругопластических деформаций, равный предельным. На обратном ходе цикла нагружения происходит частичное восстановление геометрии вершины трещины и размера пластической зоны, существовавших в начале цикла нагружения.

Литература

1. Нейбер Г. Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации // Механика: Сб. переводов. 1961. № 4. С. 117–130.
2. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.

3. Клочко О.Е., Шабанов А.П. Применение метода конечных элементов для расчета концентраций напряжений в вершинах дефектов малого радиуса // Вестн. СГУПС. Новосибирск: Изд-во СГУПС, 2005. Вып. 12. С. 47–51.
4. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. М.: Мир, 1977. 302 с.
5. Лукьянов В.Ф., Фолин В.Н. Инженерный метод расчета параметра вязкости разрушения // Проблемы прочности. 1972. № 2. С. 55–59.
6. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения твердых тел. СПб.: Профессия, 2002. 320 с.
7. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теоретич. лит-ры, 1947. 204 с.