



Пасий Владимир Шмульевич закончил физико-технический факультет Новосибирского электротехнического института в 1970 г. Специализировался на кафедре «Промышленная электроника» НЭТИ до 1982 г. в качестве разработчика универсальных программ для анализа электрических схем и вентильных электроприводов. Защитил кандидатскую диссертацию в 1990 г.

Область научных интересов — разработка эффективных методов анализа технических объектов в задачах САПР. Им предложен в ряде публикаций высокоточный имитационный метод моделирования сложных систем управления, в том числе бесколлекторных тяговых двигателей электроподвижного состава.

УДК 621.314.632

В.Ш. ПАСИЙ

ПРОБЛЕМА ТОЧНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Постановка задачи. В современной технической литературе все чаще отмечается актуальность изучения процессов в САУ с учетом наиболее полного соответствия математических моделей и реальных устройств [1, 2]. Так, в [1] указывается, что «несоответствие в поведении теоретической и реальной систем обычно обнаруживается при наладке последней, этап полуэкспериментальной доводки есть неизбежный шаг к получению работоспособной САУ». Добавим, для получения работоспособной САУ необходим учет влияния управляющей микроЭВМ, вентильного преобразователя (ВП) в качестве усилителя мощности, упругих связей и люфтов в механической части и т.д. на качество регулирования [3]. Трудоемкость доводки приводит к заметному увеличению стоимости и сроков проектирования САУ.

Тем не менее, повышение уровня информационного обеспечения процесса проектирования с помощью цифрового моделирования встречает ряд трудностей. Для выяснения причин этих трудностей кратко рассмотрим характеристику метода расчета, использующегося в традиционных пакетах Matlab, MathCAD, предлагаемых для пользователей САПР [4].

В основе лежит метод переменных состояния [1, 2], когда математическое описание объекта исследования автоматически приводится к канонической форме Коши:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{U}), \quad (1)$$

где $\mathbf{X}$ — вектор переменных состояния; t — время; $\mathbf{U}$ — вектор входных воздействий; $\mathbf{F}$ — вектор-функция, в общем случае нелинейная.

Исходным материалом для составления системы (1) служит блочно-структурное представление САУ, одноканальные звенья которых представляются в виде передаточных функций первого либо более высоких порядков, а также — нелинейных звеньев. Далее, система (1) решается стандартным численным методом Рунге—Кутты 4-го порядка. Цифровые модели отдельных звеньев «набираются» из библиотеки программных модулей, предлагаемых в САПР.

Однако для надежных расчетов динамики сложных САУ в задачах САПР требуется рассмотреть две:

1. Задача автоматизированного приведения уравнений отдельных звеньев САУ к форме Коши (1).

2. Задача решения приведенной системы численными методами.

Первая задача. Для повышения уровня полноты моделей необходимо предусмотреть возможности расчетов САУ, звенья которых могут быть представлены не только в виде одноканальных передаточных функций, но и в виде:

- частотных характеристик,
- z -преобразования (или разностных схем) для дискретных звеньев

$$u(z) = \sum_k^{\infty} u(kT)z^{-k}, \text{ где } T — \text{период дискретности};$$

- ВП в виде силовой электрической схемы с системой управления вентилями;
- двигателей переменного тока в виде векторно-матричного представления токов и напряжений во вращающейся ортогональной системе координат и т.д.

Отсюда понятно, что стремление к информационной полноте модели САУ приводит в общем случае к невозможности использования формы Коши (1) для расчетов динамики, так как выделение первой производной по времени в каждом динамическом звене без идентификации проблематично.

Вторая задача. Отметим проблемы, возникающие при решении (1).

- Специфический вид (1) с выделением производной в каждом динамическом звене САУ накладывает существенные ограничения на вид вектор-функции $F(X, t, U)$, которая не может иметь разрывов первого и второго рода, что, как правило, бывает при анализе дискретно-аналоговых САУ, систем, содержащих нелинейности типа реле, ограничители, и т.д. В этом случае скачки значений производных приводят к значительным погрешностям в расчетах этих производных и всей системы уравнений либо к неоправданному затягиванию времени счета.

- К неэффективному использованию машинного времени счета приводят расчеты САУ с большим разбросом постоянных времени, например, позиционных электроприводов с подчиненным регулированием [5].

- Расчет САУ с неполной наблюдаемостью может, как показано в [1], привести к частичной неустойчивости переходного процесса и, следовательно, — к хаотическому росту вычислительных погрешностей. К такому же эффекту могут привести расчеты вентильных электроприводов, когда ВП оказывается в режиме неполной управляемости, в аварийном режиме и т.д.

Применение имитационного метода [3, 5, 6] (ИМ) без выделения производной в каждом динамическом звене САУ (расчет всех звеньев выполняется по принципу «от входа к выходу») в основном позволяет решить первую и вторую (частично) задачи. Однако учет обратных связей САУ приводит к появлению «барьера» точности расчета вследствие известного запаздывания значения сигнала обратной связи (ОС) в контуре управления на один шаг по времени [3]. Преодоление такого «барьера» возможно при использовании двухциклического режима ИМ. Однако в теории этот метод не рассматривается. Поэтому задача повышения точности расчетов динамических режимов САУ для пользователей САПР является *актуальной*.

Разработка способа повышения точности ИМ. Как известно из [1], приведенная САУ (как бы структурно сложна ни была) может быть представ-

лена в виде цепочки из n последовательно соединенных интеграторов с нелинейными элементами (рис. 1). При этом имитационные расчеты в каждый момент времени t_i выполняются в направлении распространения сигналов в контурах управления (рассчитываются звенья 1, 2, 3 и т.д. в порядке нумерации). Время разбивается на дискретную сетку с шагом h . Значения сигналов ОС берутся из расчетов на предыдущем шаге y_{i-1} . Источником погрешности расчета САУ, исходя из структурности представления, являются погрешности расчетов каждого динамического звена в контуре управления, а также погрешность запаздывания $D = |y_i - y_{i-1}|$, которая и определяет «барьер» точности расчетов.

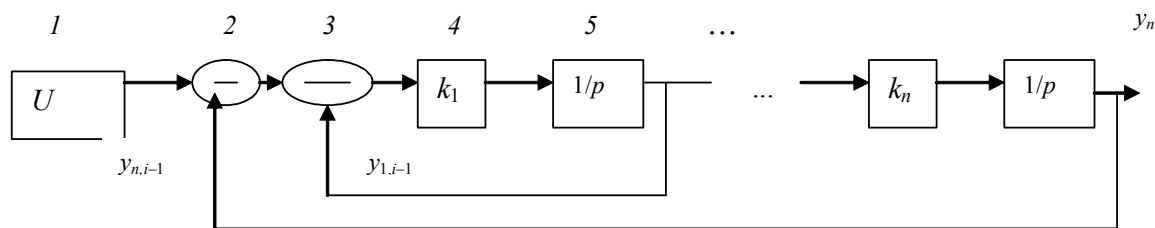


Рис. 1. $k_1, \dots, k_n$ — параметры САУ, в общем случае нелинейные

Оценим D и погрешности интегрирования методами прямоугольников и трапеций и сравним их между собой. (Для простоты расчет погрешностей динамических звеньев первого, второго и т.д. порядков опускаем.)

При расчете интегратора методом прямоугольников имеем

$$y_i = y_{i-1} + hx_i, \quad (2)$$

где y_i, y_{i-1}, x_i — значения выходного и входного сигналов интегратора в t_i, t_{i-1} моменты времени.

Предполагая, что $x(t)$ на участке одного h изменяется линейно, найдем локальную погрешность расчета:

$$\Delta y_{\text{пр.л}} = h(x_i - x_{i-1})/2. \quad (3)$$

Разлагая x_i в ряд Тейлора, получим

$$x_i = x_{i-1} + h \frac{dx_{i-1}}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2x}{dt^2} + \dots \quad (4)$$

При условии сходимости (4) получим из (3) формулу расчета локальной погрешности:

$$\Delta y_{\text{пр.л}} = \frac{h^2}{2} \frac{dx_{i-1}}{dt}. \quad (5)$$

По мере движения по оси времени глобальная погрешность накапливается из элементов локальной:

$$\Delta y_{\text{пр.гл}} = \sum_{i=1}^N y_{\text{пр.л}}(t_i), \quad (6)$$

где N — количество шагов на заданном участке времени.

Так, для $t = T$ и почти линейно изменяющегося $x(t)$ получим

$$y_{\text{пр.гл}}(T) = \Delta y_{\text{пр.л}} \frac{T}{h} = \frac{hT}{2} \frac{dx_{i-1}}{dt} \approx h. \quad (7)$$

Для $x(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}$ получим $y_{\text{пр.гл}} \approx \frac{Ah}{2e}$.

При расчете колебательных САУ точность интегрирования методом прямоугольников должна быть выше (7) вследствие очевидной компенсации погрешности, которая накапливается при возрастании волнообразного процесса и снижается при его убывании. При расчете слабо демпфированных систем временные участки возрастания и убывания значений колебаний сопоставимы, форма отдельных колебаний волнообразного процесса почти симметрична. Поэтому глобальная погрешность расчета интегратора методом прямоугольников должна приближаться к значениям погрешности, полученной методом трапеций.

При интегрировании методом трапеций имеем

$$y_i = y_{i-1} + \frac{x_i + x_{i-1}}{2} h. \quad (8)$$

Выполняя операции аналогично (4)–(6), получаем

$$y_{\text{тр.л}} = \frac{h^3}{8} \frac{d^2 x_{i-1/2}}{dt^2}. \quad (9)$$

При $t = T$ получим

$$\Delta y_{\text{тр.гл}} = \frac{Th^2}{8} \frac{d^2 x_{i-1/2}}{dt^2} \approx h^2. \quad (10)$$

Для $x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ $\Delta y_{\text{тр.гл}} = \frac{Ah^2}{8Te}$. Отсюда глобальная погрешность расчета методом трапеций уменьшается в $4N$ раза по сравнению с погрешностью расчета методом прямоугольников.

Формула погрешности D для систем с ОС имеет вид:

$$D = \left| h \frac{dy_{i-1}}{dt} \right| \cong \left| h \frac{dx_{i-1}}{dt} \right| \approx h. \quad (11)$$

Таким образом, погрешность D сопоставима с погрешностью расчета по формуле (3) и значительно больше погрешности расчета по формуле (8).

Отсюда понятно, что для достижения точности расчета по формуле (8) и выше необходимо ликвидировать «барьер» точности расчетов. Это возможно, если применить двухциклический (т.е. двухкратный) режим расчета САУ [3]:

- первый имитационный цикл — ликвидируется «барьер» точности расчетов ИМ ($D \approx 0$), для расчета интеграторов применяется формула (3);
- второй имитационный цикл — для расчета интеграторов применяется формула (8) и достигается уровень точности (10) при удвоении трудоемкости расчета.

Необходимым условием реализации двухциклического ИМ, как следует из (7) и (10), является наличие ограничения роста глобальных погрешностей при расчетах переходной функции либо импульсной характеристики:

$$\frac{dx}{dt}(t \rightarrow \infty) \approx 0; \quad \frac{dx}{dt}(t \rightarrow \infty), \quad (12)$$

т. е. исследуемые САУ должны быть устойчивыми и полностью управляемыми. При нарушении этих условий САУ не могут эффективно рассчитываться вследствие хаотического роста глобальной погрешности. Для нелинейных систем эффект возрастания погрешности расчета может привести к полному искажению формы сигналов, особенно в системах с ВП.

Предложенный метод повышения точности расчетов САУ легко реализуется с помощью распространенного табличного процессора Excel [4]. Применяя Excel,

пользователь оперативно может выбрать необходимый режим цифрового моделирования. Процессор Excel позволяет (без программирования) ввести цепочку формул первого и второго имитационного циклов в одной табличной строке, соответствующей расчету САУ в момент времени t_i . Обмен данными между звеньями двух циклов осуществляется по аналогии работы двух систем с перекрестными связями (рис. 2). Далее заполненная формулами табличная строка копируется на все остальные строки до конца переходного процесса.

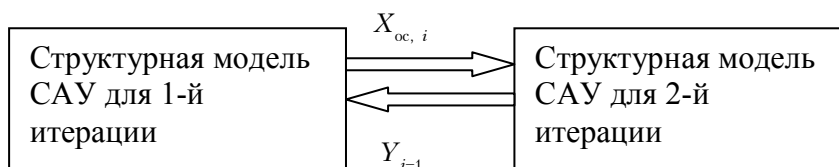


Рис. 2. Схема двухциклического метода: $X_{oc, i}$ — вектор выходных сигналов ОС в момент времени t_i ; Y_{i-1} — вектор выходных сигналов динамических звеньев.

Примеры повышения точности моделирования САУ ИМ. Для примера выберем один интегратор с ОС и две замкнутые цепочки интеграторов (см. рис. 1), динамика которых описывается передаточными функциями первого и второго порядков:

$$w_1(p) = \frac{1}{p+1} \text{ при } k_1 = 1, \quad (13)$$

$$w_2(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\lambda T p + 1} \text{ при } k_1 = 2, k_2 = 2p^2 \text{ (при } T = \frac{1}{2\pi}, \lambda = \frac{1}{2\pi}).$$

Такой выбор диктуется желанием сравнить по точности численное решение с известными формулами аналитического решения.

Схема двухциклического метода расчета одного интегратора с ОС в момент времени t_i показана на рис. 3. При этом $w_1(p) = \frac{1}{p}$ рассчитывается методом прямоугольников, а $w_2(p) = \frac{1}{p}$ рассчитывается методом трапеций ($U = 1$).

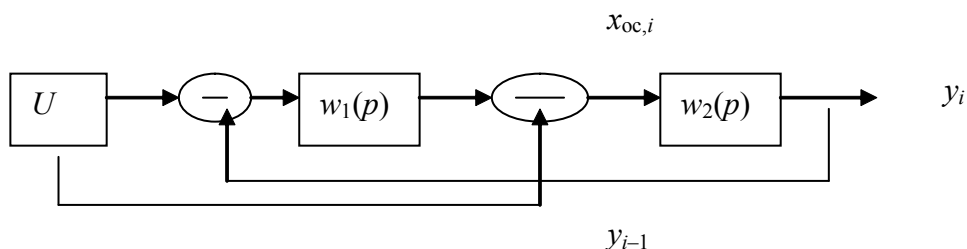


Рис. 3. $k_1 = 1$, двухциклическая схема

Из графика (рис. 4) видно существенное снижение значений погрешности расчета с ограничением ее возрастания в конце переходного процесса по сравнению с одноциклической имитацией.

Схема двухциклического метода расчета цепочки из двух замкнутых интеграторов в момент времени t_i показана на рис. 5. При этом $w_1(p) = \frac{2}{p}$ и

$w_2(p) = \frac{2\pi^2}{p}$ рассчитываются методом прямоугольников, а $w_3(p) = \frac{2}{p}$ и

$w_4(p) = \frac{2\pi^2}{p}$ — методом трапеций ($U = 1$). В этом случае двухциклическая схема

расчета (рис. 6) колебательной САУ представляется избыточной, так как одноциклическая имитация дает сопоставимую погрешность. Такой эффект связан с естественной компенсацией погрешности интегрирования, которая накапливается только до пределов возрастания волнообразного процесса. В [3] показана возможность дальнейшего повышения точности численными методами.

При $t \rightarrow \infty$ погрешности расчетов уменьшаются, и значения выходных сигналов стремятся к точным значениям по причине устойчивости и управляемости анализируемых САУ.

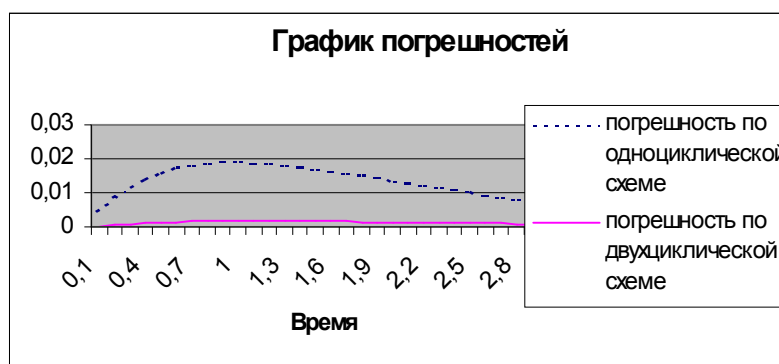


Рис. 4. Погрешности расчета САУ с одним замкнутым интегратором

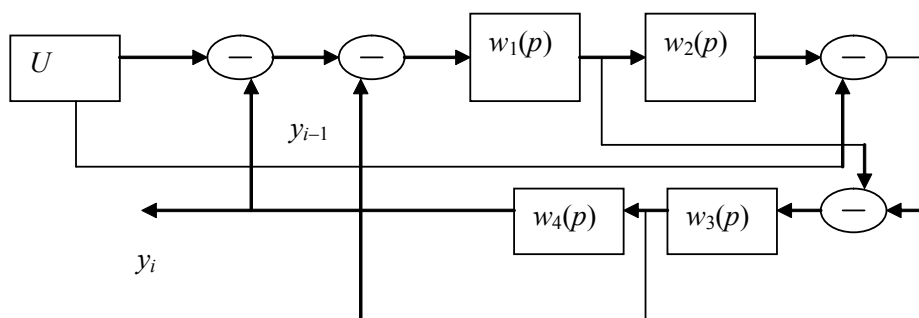


Рис. 5. $k_1 = 2$, $k_2 = 2p$; двухциклическая схема

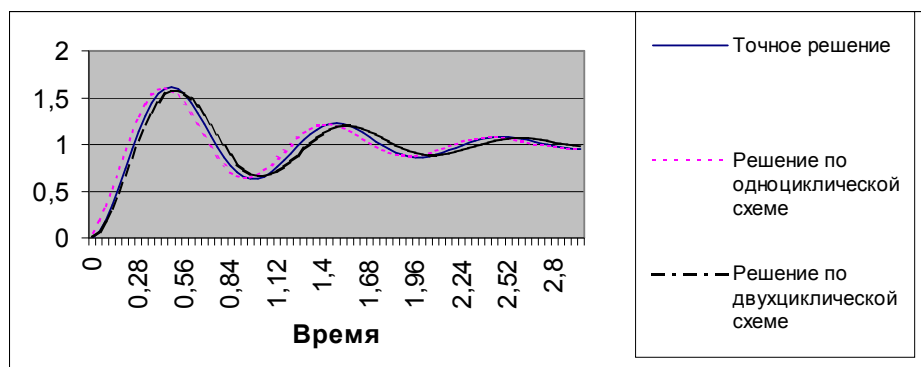


Рис. 6. Графики переходных функций САУ, рассчитанных по одно- и двухциклической схемам

Выводы. ИМ для расчетов динамики САУ позволяет пользователям свободно «набирать» желаемый по точности режим расчета на базе табличного процессора Excel, не прибегая к программированию. Эта операция делается с помощью библиотеки программных модулей, которая применяется и для задания объекта исследования. Платой за универсализм и высокую точность расчета ИМ является определенное повышение трудоемкости задания исходных данных. Однако возможность копирования цепочки формул одноциклической имитации для создания цепочки формул второго имитационного цикла (не копируются только разностные схемы расчета динамических звеньев) приводит к известному сокращению этой трудоемкости.

Литература

1. *Востриков А. С., Французова Г. А.* Теория автоматического регулирования. М.: Высш. шк., 2004. 366 с.
2. *Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления* / Под ред. К. А. Пупкова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 540 с.
3. *Пасик В. Ш.* Имитационный метод для численного анализа систем управления с обратной связью // *Автоматрия*. 1999. № 1. С. 100–104.
4. *Дьяконов В. П.* Компьютерная математика. М.: Нолидж, 2001. 510 с.
5. *Пасик В. Ш.* Применение принципа разделения движения при цифровом моделировании систем с обратной связью имитационным методом // *Автоматрия*. 2003. № 2. С. 108–115.
6. *Гультяев А. К.* Matlab 5.2. Имитационное моделирование в среде WINDOWS: Практическое пособие. СПб.: Корона принт, 1999. 288 с.

Научное издание

**ВЕСТНИК СИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ**

Выпуск 17

Редакторы *М. А. Турбина, Л. В. Лебедева, Н. П. Клубкова*
Компьютерная верстка *Ю. В. Борцова*

Изд. лиц. ЛР № 021277 от 06.04.98.

Подписано в печать 31.10.07.

32,75 печ. л.

22,5 уч.-изд. л.

Тираж 500 экз.

Заказ № 1822

Издательство Сибирского государственного университета путей сообщения
630049 Новосибирск, ул. Д. Ковальчук, 191
Тел. (383) 328-03-81. E-mail: press@stu.ru