

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ОСНОВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ФУНДАМЕНТОВ ОПОР МОСТОВ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ ГРАФИКА СДВИГА

При малоэтажном строительстве, когда давление на основание составляет лишь 0,1...0,3 МПа, в расчетах несущей способности график зависимости касательных напряжений от нормальных действительно может быть представлен в виде прямой Кулона. Но когда происходит увеличение давления, например, в основании фундаментов опор мостовых переходов свойства грунта меняются, и это приводит к искривлению графика сдвига.

В опытах также установлено, что огибающая кругов Мора чаще всего обладает существенной кривизной, и при этом условия Кулона и Треска оказываются слишком грубой аппроксимацией фактической кривой $f(\sigma_n)$. Поэтому для более точного описания работы грунта в предельной стадии, особенно при больших давлениях, следовало бы подбирать криволинейную огибающую кругов Мора.

Основные положения по решению плоской задачи теории предельного равновесия грунтов при нелинейном графике сдвига были разработаны еще В.В. Соколовским [1]. При этом условие предельного равновесия сыпучей среды определялось в виде условия Мора

$$|\tau_n| = f(\sigma_n), \quad (1)$$

где τ_n — касательное напряжение, действующее на площадке с нормалью n , МПа; σ_n — нормальное напряжение, действующее на площадке с нормалью n , МПа; f — произвольная функция указанного аргумента, определяемая экспериментально.

Каноническая система уравнений статики сыпучей среды была получена посредством функции напряжений χ , введенной Ж. Манделем [1, 2] в виде дифференциального соотношения:

$$d\chi = \frac{d\sigma_n}{2|\tau_n|} - d\mu, \quad (2)$$

где 2μ — угол между характеристиками (линиями скольжения) двух различных семейств.

Этой же функцией для решения обобщенной осесимметричной задачи воспользовался В.Г. Березанцев [3].

Для осуществления решения нами были использованы экспериментальные данные, полученные сотрудником кафедры «Геология, основания и фундаменты» СГУПС П.С. Вагановым в 1977 г. [4]. Им испытывались среднезернистые песчаные грунты, а также фракционированные пески.

В соответствии с многими экспериментальными данными так называемые начальные участки предельной огибающей для всех случаев испытанных грунтов без особой погрешности могут быть аппроксимированы прямой линией. Под начальным участком понимают диапазон давлений от $\sigma_n \approx 0,1...0,5$ МПа. Дальнейшее увеличение давления приводит к нелинейной зависимости касательных напряжений от нормальных, приложенных к площадке сдвига. При нормальных напряжениях, значение которых находится в пределах от 0 до

2,5 МПа [4], весь участок может быть аппроксимирован как прямой, так и кривой, но в первом случае наблюдается большая погрешность между экспериментальными и аппроксимационными значениями напряжений.

Как было показано выше, в ряде предыдущих исследований авторы отталкивались от нелинейной связи в плоскости τ_n, σ_n , т. е. касательных и нормальных напряжений, приложенных к площадке сдвига. В настоящей статье предлагается аппроксимировать нелинейность в плоскости τ, σ , т. е. полусуммы и полуразности главных напряжений. Такой подход был использован Д.Д. Ивлевым [5] и А.К. Черниковым [6]. Необходимо отметить, что решения Ивлева были получены для невесомой среды.

Таким образом, условие прочности можно представить в виде:

$$\tau = \tau(\sigma), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \quad (3)$$

где σ_1, σ_3 — главные напряжения, МПа (причем $\sigma_1 > \sigma_3$ — сжимающие напряжения положительны).

В решении была рассмотрена логарифмическая аппроксимация

$$\tau = a \ln(b\sigma + 1), \quad (4)$$

где a и b — параметры прочности грунта.

Итак, в декартовой системе координат xOy плоская задача ТПРГ описывается системой уравнений [7]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y, \quad \tau = \tau(\sigma), \quad (5)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3).$$

Компоненты тензора предельных напряжений можно выразить через величины главных напряжений следующим образом:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \sigma \pm \tau \cos 2\alpha; \quad \tau_{xy} = \tau \sin 2\alpha. \quad (6)$$

Далее была произведена подстановка выражений (6) в уравнения (5) и получена (согласно В.В. Соколовскому) основная система уравнений

$$\begin{aligned} (1 + \tau' \cos 2\alpha) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \tau' \sin 2\alpha \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\tau \sin 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2\tau \cos 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= X; \\ \tau' \sin 2\alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - \tau' \cos 2\alpha) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\tau \cos 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + 2\tau \sin 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= Y, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tau' = \frac{d\tau}{d\sigma}$.

После несложных преобразований получена каноническая система уравнений плоской задачи статики сыпучей среды для произвольного условия прочности с учетом массовых сил:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2\alpha \pm \sqrt{1 - \tau'^2}}{\tau' + \cos 2\alpha}; \quad (8)$$

$$d\sigma \pm 2 \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau'^2}} d\alpha = X \left(dx \mp \frac{\tau'}{\sqrt{1-\tau'^2}} dy \right) + Y \left(dy \pm \frac{\tau'}{\sqrt{1-\tau'^2}} dx \right). \quad (8)$$

Верхние знаки в выражениях (8) отвечают характеристикам первого семейства, нижние — второго семейства.

Можно отметить, что полученная система уравнений при $|\tau'| < 1$ принадлежит к гиперболическому типу, при $|\tau'| = 1$ — к параболическому типу и при $|\tau'| > 1$ — к эллиптическому типу.

Если принять $\tau' = \sin\varphi = \cos 2\mu$, то уравнение характеристик можно переписать в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\alpha \pm \mu). \quad (9)$$

Для предлагаемой логарифмической аппроксимации (9) огибающей Мора производная по σ равна

$$\tau' = \frac{ab}{b\sigma + 1}. \quad (10)$$

Все вычисления осуществлялись методом конечных разностей по линиям скольжения, которые являются характеристиками системы уравнений (8) гиперболического типа. Решение было осуществлено автоматизировано в программе Visual Basic 6.0 посредством итераций на каждом шаге интегрирования [7].

Далее рассмотрим решение осесимметричной задачи вне концепции полной пластичности [8, 9] с тем же условием прочности, что и в плоской задаче. Таким образом, в цилиндрических координатах $Orz\theta$ предельное равновесие грунтовой среды в условиях осевой симметрии определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \gamma; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \tau &= \tau(\sigma), \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Компоненты тензора предельных напряжений связаны с главными напряжениями следующим образом:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_z \\ \sigma_r \end{matrix} \right\} = \sigma \pm \tau \cos 2\alpha; \quad \tau_{rz} = \tau \sin 2\alpha. \quad (12)$$

Тангенциальное напряжение в условиях осесимметричной задачи определяется как

$$\sigma_\theta = \sigma_3 + m \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sigma + \tau(m-1), \quad 0 \leq m \leq 2. \quad (13)$$

Для вывода канонической системы уравнений необходимо получить основную систему уравнений путем подстановки выражений (12) в уравнения равновесия (11), с учетом (13).

Таким образом, основная система уравнений в случае осесимметричной задачи имеет вид:

$$(1 + \tau' \cos 2\alpha) \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \tau' \sin 2\alpha \frac{\partial \sigma}{\partial r} - 2\tau \sin 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} + 2\tau \cos 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\tau}{r} \sin 2\alpha = \gamma; \quad (14)$$

$$\tau' \sin 2\alpha \frac{\partial \sigma}{\partial z} + (1 - \tau' \cos 2\alpha) \frac{\partial \sigma}{\partial r} + 2\tau \cos 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} + 2\tau \sin 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{\tau}{r} (m - 1 + \cos 2\alpha) = 0.$$

Далее к уравнениям (14) присоединяются выражения для получения полных дифференциалов:

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz + \frac{\partial \alpha}{\partial r} dr, \quad d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz + \frac{\partial \sigma}{\partial r} dr. \quad (15)$$

Решая систему четырех уравнений (14) и (15) относительно частных производных $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial r}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial r}$ и приравнявая числители и знаменатели полученных выражений к нулю, можно получить каноническую систему уравнений осесимметричной задачи статики сыпучей среды для выполнения произвольного условия прочности:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\sin 2\alpha \pm \sqrt{1 - \tau'^2}}{\tau' + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha \pm \mu); \quad (16)$$

$$d\sigma \pm 2 \frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau'^2}} d\alpha = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau'^2}} \left[(m - 1) (\sqrt{1 - \tau'^2} dr \pm \tau' dz) \pm dz \right] \frac{1}{r} + \gamma \left(dz \mp \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \tau'^2}} dr \right).$$

Верхние знаки в выражениях (16) соответствуют характеристикам первого семейства, нижние — второго семейства.

Можно отметить, что полученная система уравнений при $|\tau'| < 1$ принадлежит к гиперболическому типу, при $|\tau'| = 1$ — к параболическому типу и при $|\tau'| > 1$ — к эллиптическому типу.

Особенностью системы (16) является то, что при приближении к оси симметрии первое слагаемое в правой части второго уравнения обращается в

неопределенность типа $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Действительно, в силу симметрии на оси Oz угол α

может принимать значения 0 или $\pm \frac{\pi}{2}$, при этом параметр m будет равен

соответственно 0 или 2. Учитывая первое, из уравнений (16) будем иметь указанную неопределенность. Для раскрытия данных неопределенностей было

использовано правило Лопиталья при $r \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$, $m = 0$ и при $r \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$,

$m = 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow 0}} \frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau'^2}} \left[-(\sqrt{1 - \tau'^2} dr \mp \tau' dz) \pm dz \right] \frac{1}{r} &= \mp \frac{2\tau}{\sqrt{1 - \tau'^2}}; \\ \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}}} \frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau'^2}} \left[(\sqrt{1 - \tau'^2} dr \mp \tau' dz) \pm dz \right] \frac{1}{r} &= \mp \frac{2\tau}{\sqrt{1 - \tau'^2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, для определения малой окрестности оси симметрии канонической системе уравнений можно придать вид:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{\sin 2\alpha \pm \sqrt{1 - \tau'^2}}{\tau' + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha \pm \mu);$$

$$d\sigma \pm 4 \frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau'^2}} d\alpha = \gamma \left(dz \mp \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \tau'^2}} dr \right).$$
(18)

Все вычисления осуществлялись методом конечных разностей по линиям скольжения, которые являются характеристиками системы уравнений (18) гиперболического типа. Решение было осуществлено автоматизировано в программе Visual Basic 6.0 посредством итераций на каждом шаге интегрирования [7].

Результаты расчетов предельной нагрузки $P_{\text{пр}}$, зависящей от пригрузки q , представлены в виде графиков на рис. 1 для плоской задачи и на рис. 2 для осесимметричной задачи ТПРГ. Графики в качестве примера приведены только для опыта № 1 [4], так как качественная картина изменения предельной нагрузки в других опытах не меняется.

Из графиков видно, что прямая, аппроксимирующая начальный участок, справедлива лишь для небольших пригрузок, что очень часто встречается в практике изыскания и проектирования, при дальнейшем увеличении пригрузки проявляется нелинейный характер зависимости предельной нагрузки $P_{\text{пр}}$ от пригрузки q . Данное обстоятельство и было учтено введением логарифмической зависимости (4), которая наиболее точно описывает характер работы грунтов как при больших давлениях, так и на начальном участке.

Определение несущей способности основания прямоугольного фундамента сводится к суммированию результатов вычислений плоской и осесимметричной задач согласно расчетной схеме, приведенной на рис. 3.

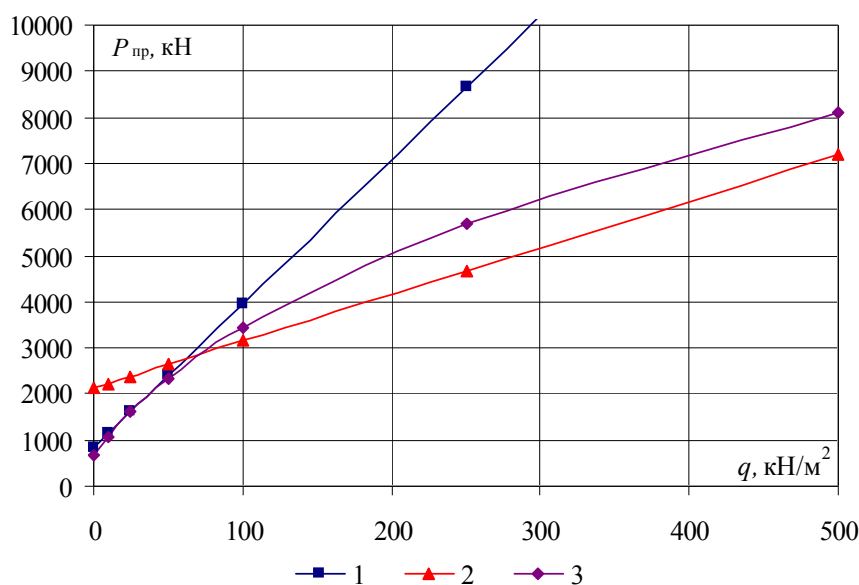


Рис. 1. Графики зависимости $P_{\text{пр}}$ от пригрузки q для аппроксимаций первой серии опытов в случае плоской задачи:

- 1 — решение при условии прочности в виде прямой Кулона, аппроксимирующей начальный участок; 2 — то же для всего участка; 3 — решение при условии прочности в виде нелинейной аппроксимации всего участка, $\tau = 2530 \ln(0,00025\sigma + 1)$

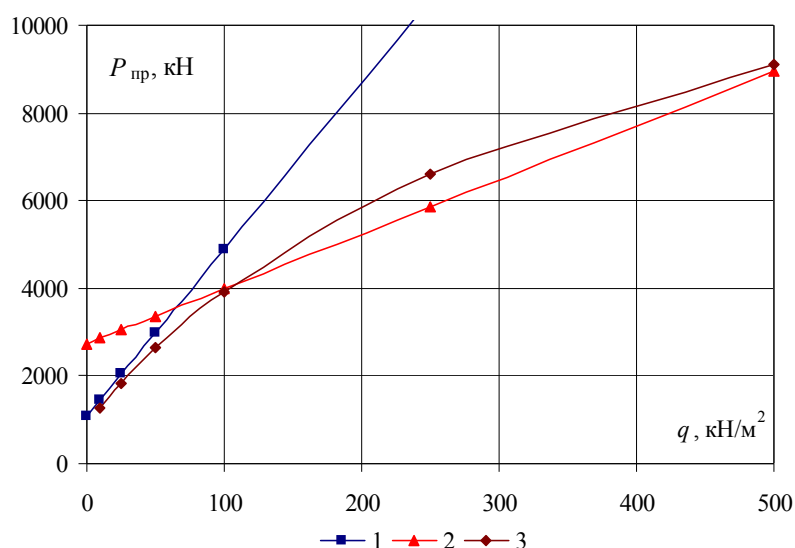


Рис. 2. Графики зависимости $P_{пр}$ от пригрузки q для аппроксимаций первой серии опытов в случае осевой симметрии:

1 — решение при условии прочности в виде прямой Кулона, аппроксимирующей начальный участок; 2 — то же для всего участка; 3 — решение при условии прочности в виде нелинейной аппроксимации всего участка, $\tau = 2530 \ln(0,00025\sigma + 1)$

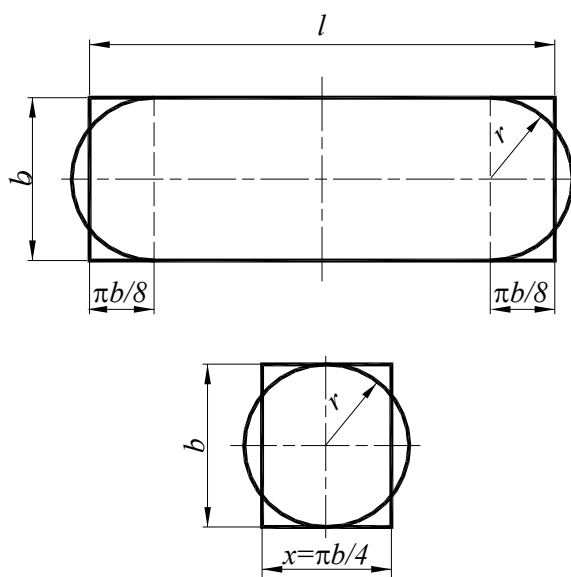


Рис. 3. Расчетная схема

При этом был рассмотрен случай, когда ширина фундамента b в средней части прямоугольного штампа равна диаметру фундамента d на концах штампа, т. е. $b = d = 1$ м. Условие прочности, представленное зависимостью (4), было рассмотрено при проведении пяти опытов П.С. Ваганова (опыт № 1, опыт № 2, опыт № 3, опыт № 6, опыт № 10) [4].

На рис. 4, 5 приведена качественная картина изменения предельной нагрузки $P_{пр}$ на основание квадратного (круглого) и прямоугольного (ленточного) штампов в зависимости от пригрузки q для первой серии опытов [4] при разных аппроксимациях, так как для других опытов качественно зависимость предельной нагрузки $P_{пр}$ от пригрузки q не меняется.

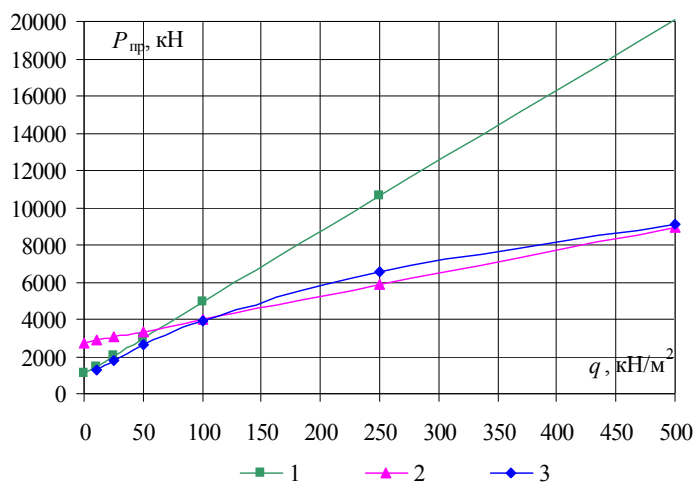


Рис. 4. Графики зависимости $P_{пр}$ от пригрузки q для аппроксимаций первой серии опытов в

случае квадратного (круглого) фундамента, $\eta = \frac{l}{b} = 1$:

- 1 — решение при условии прочности в виде прямой Кулона, аппроксимирующей начальный участок; 2 — то же для всего участка; 3 — решение при условии прочности в виде нелинейной аппроксимации всего участка, $\tau = 2530 \ln(0,00025\sigma + 1)$

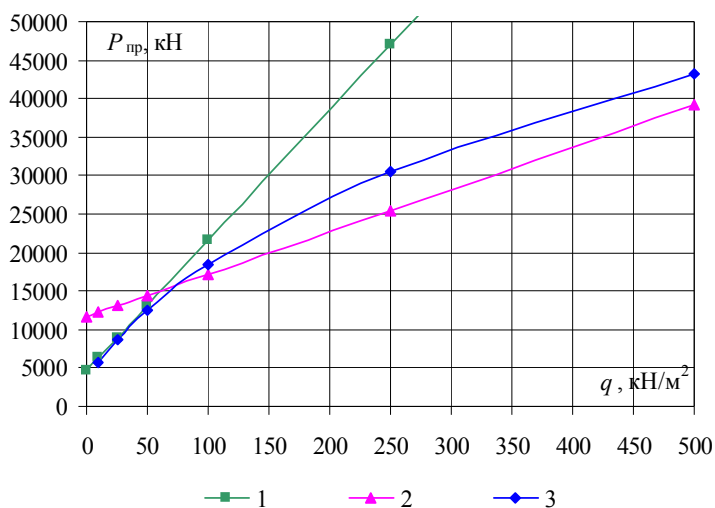


Рис. 5. Графики зависимости $P_{пр}$ от пригрузки q для аппроксимаций первой серии опытов в

случае прямоугольного (ленточного) фундамента, $\eta = \frac{l}{b} = 5$:

- 1 — решение при условии прочности в виде прямой Кулона, аппроксимирующей начальный участок; 2 — то же для всего участка; 3 — решение при условии прочности в виде нелинейной аппроксимации всего участка, $\tau = 2530 \ln(0,00025\sigma + 1)$

Расчеты предельной нагрузки, определенной при использовании линейного закона Кулона, аппроксимирующего начальный участок, дают завышенный результат при больших пригрузках. Нагрузка, установленная с учетом прямой Кулона, аппроксимирующей весь участок, оказывается завышенной на начальном участке. И только логарифмическая нелинейная аппроксимация дает удовлетворительные результаты на всем диапазоне пригрузок. Следовательно, учет нелинейности графика сдвига при больших пригрузках должен быть обязательным.

На рис. 6 показаны графики зависимости отношения $P_{\text{пр}}/P_{\text{пл}}$ от соотношения сторон прямоугольного фундамента η при различных пригрузках для первой серии опытов при нелинейной аппроксимации в виде предлагаемого условия Мора (4).

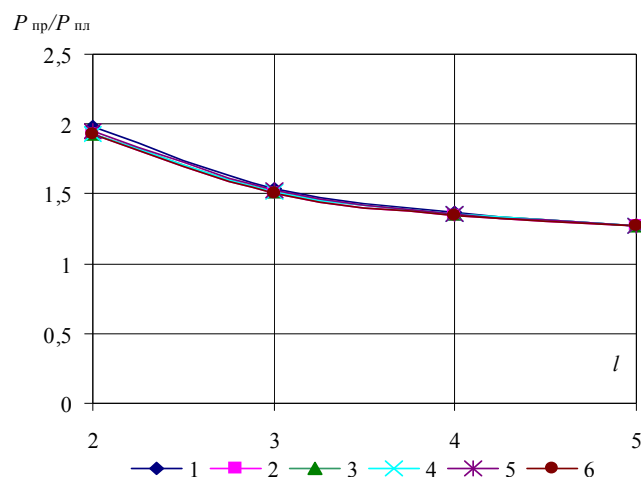


Рис. 6. Графики зависимости отношения $P_{\text{пр}}/P_{\text{пл}}$ от соотношения сторон прямоугольного фундамента η при различных пригрузках для первой серии опытов при нелинейной аппроксимации:

1 — при пригрузке $q = 10$ кПа; 2 — при пригрузке $q = 25$ кПа; 3 — при пригрузке $q = 50$ кПа; 4 — при пригрузке $q = 100$ кПа; 5 — при пригрузке $q = 250$ кПа; 6 — при пригрузке $q = 500$ кПа. Условие Мора — $\tau = 2530 \ln(0,00025\sigma + 1)$

Как видно из рис. 6, отношение $P_{\text{пр}}/P_{\text{пл}}$ не зависит от величины пригрузки и монотонно убывает при переходе от квадрата к ленте.

На рис. 7 приведены графики зависимости предельного давления $P_{\text{пр}}$ от соотношения сторон прямоугольного фундамента η при различных пригрузках также только для первой серии опытов для нелинейной аппроксимации условия Мора (4).

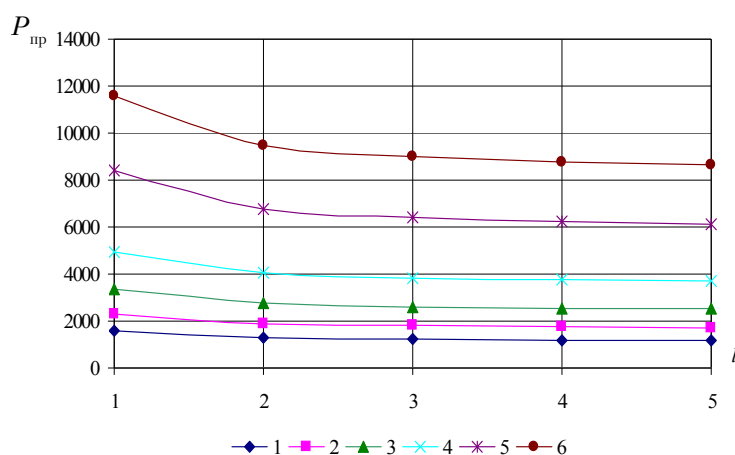


Рис. 7. Графики зависимости предельного давления $P_{\text{пр}}$ на основание прямоугольного фундамента от его длины l при различных пригрузках для первой серии опытов при нелинейной аппроксимации:

1 — при пригрузке $q = 10$ кПа; 2 — при пригрузке $q = 25$ кПа; 3 — при пригрузке $q = 50$ кПа; 4 — при пригрузке $q = 100$ кПа; 5 — при пригрузке $q = 250$ кПа; 6 — при пригрузке $q = 500$ кПа. Условие Мора — $\tau = 2530 \ln(0,00025\sigma + 1)$

Таким образом, становится ясно, что предельное давление на основание прямоугольного фундамента уменьшается при переходе от квадрата к ленте [10, 11].

Библиографический список

1. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 240 с.
2. Mandel J. Conditions de stabilite et postulat de Drucker. In Rheology and soil mechanics symposium, Grenoble, Berlin. 1964. P. 58–68
3. Березанцев В.Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды. М.: Гос. изд-во технико-теор. лит-ры, 1952. 120 с.
4. Ваганов П.С. Определение параметров прочности песчаных грунтов // Инженерно-геологические условия и особенности фундаментостроения при транспортном строительстве в условиях Сибири: Тр. НИИЖТа. Вып. 180 / НИИЖТ. Новосибирск, 1977. С. 53–61.
5. Излев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М., 1966. 232 с.
6. Черников А.К. Решение жесткопластических задач геомеханики методом характеристик: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского гос. ун-та путей сообщения, 1997. 192 с.
7. Королев К.В. Некоторые теоретические аспекты расчета несущей способности грунтовых оснований при действии больших нагрузок // Инженерная геология, механика грунтов, основания и фундаменты: Сб. науч. статей / СГУПС. Новосибирск, 2007. С. 48–55.
8. Караулов А.М. Несущая способность оснований осесимметричных фундаментов. Новосибирск: Изд-во СГУПС, 2002. 104 с.
9. Караулов А.М., Соловьев Ю.И. Статические решения осесимметричной теории предельного равновесия грунтов вне концепции полной пластичности // Инженерно-геологические условия, основания и фундаменты транспортных сооружений: Межвуз. сб. науч. тр. / НИИЖТ. Новосибирск, 1989. С. 35–40.
10. Королев К.В., Бессонов В.В. К вопросу определения коэффициентов формы при оценке несущей способности оснований прямоугольных фундаментов // Изв. вузов. Сер. Стр-во. 2006. № 11–12.
11. Королев К.В., Бессонов В.В. Уточненные значения коэффициентов формы при определении несущей способности оснований прямоугольных фундаментов // Промышленное и гражданское строительство. 2008. № 4.