



Донец Николай Александрович в 2009 г. окончил Сибирский государственный университет путей сообщения (СГУПС) — факультет «Мосты и тоннели» по специальности «Мосты и транспортные тоннели», аспирант.

E-mail: donets@midast.com



Донец Александр Николаевич — кандидат технических наук, доцент. В 1981 г. окончил Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта (НИИЖТ) — факультет «Мосты и тоннели», специальность «Мосты и транспортные тоннели, инженер-строитель по мостам и тоннелям».

Имеет более 50 печатных трудов.

E-mail: donets@stu.ru

УДК 624.271

Н.А. ДОНЕЦ, А.Н. ДОНЕЦ

УЧЕТ ДЕМПФИРОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БАЛКИ С ПОВРЕЖДЕНИЯМИ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО НЕЙ МАССОЙ

В работе рассмотрено аналитическое моделирование взаимодействия шарнирно-опертой балки Эйлера—Бернулли с повреждениями и движущейся по ней массы. При этом учтены эффекты демпфирования в конструкции, что дает возможность получать более точные результаты. Численный эксперимент позволил установить, что влияние демпфирования проявляется на высоких скоростях движения массы.

Ключевые слова: динамика, балка с повреждениями, движущаяся масса, демпфирование.

Колебание пролетных строений мостов в общем случае описывается с помощью двух математических подходов, основанных на использовании балки Эйлера—Бернулли или балки Тимошенко без или с движущейся по ним нагрузкой [7]. Необходимость использования аналитических моделей, описывающих колебание пролетного строения моста, диктуется тем, что это значительно сокращает время параметрических исследований. Расчет может начинаться сразу же после изменения какой-либо переменной, например скорости движения экипажа по пролетному строению моста. Более детальный расчет на базе конечно-элементной модели может быть выполнен позже для подтверждения каких-либо данных или для получения более детальной картины поведения пролетного строения моста при движущемся по нему экипаже.

В 1984 г. было положено начало разработкам теории колебаний линейно-протяженных конструкций с повреждениями [2]. Были рассмотрены вопросы записи диффе-

ренциальных уравнений движения и соответствующих граничных условий для балок Эйлера—Бернулли с одной или несколькими парами симметричных трещин. Эффект наличия трещины в балке достигается путем изменения параметров деформаций, напряжений, перемещений и моментов в дискретном элементе. В частности, изменения напряжений, вызванные наличием трещины, описаны с помощью локальной функции для элемента, соответствующего поврежденному месту. Значение локальной функции в поврежденном элементе зависит от расстояния до трещины, а также от параметра, который оценивается с помощью экспериментов.

Результаты первых исследований в настоящее время используются для моделирования взаимодействия и вычисления откликов в системе «пролетное строение моста — движущийся экипаж». В работе представлена процедура для определения динамического коэффициента для поврежденной шарнирно-опертой балки Эйлера—Бернулли под действием движущейся по ней массы [3]. В качестве повреждения рассмотрена трещина, развитая в поперечном сечении снизу или сверху и одновременно сверху и снизу. Для вычисления податливости пружины, моделирующей наличие поврежденного элемента, используются методы механики разрушения. В отмеченных работах существует несколько важных допущений: использование сосредоточенных масс [3]; неоднозначное вычисление сил взаимодействия движущейся нагрузки с балкой. Указанное влечет за собой проблемы, связанные с учетом конвективной длительности ускорения и обеспечением условия сходимости итерационной вычислительной схемы [3, 4].

Указанные недостатки отсутствуют при вычислении спектра ответа шарнирно-опертой балки Эйлера—Бернулли с повреждениями, смоделированными вращательными пружинами. Аналитическое решение в таком случае основано на разложении в ряд функции вертикального прогиба балки, собственные значения которой предварительно вычислены с учетом наличия дефектов. Для оценки достоверности и точности такого аналитического метода был выполнен натурный эксперимент. При этом величина прогиба конструкции оказалась несколько большей, чем вычисленное значение, но в пределах инженерной точности [1].

Целью данной работы является развитие идей, предложенных в работе [1] и связанных с повышением точности вычисления вертикальных прогибов путем учета демпфирования конструкции.

Модель поврежденного балочного пролетного строения

Запишем уравнение движения системы «балка — движущаяся масса» следующим образом:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + EI(x) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = P_i(t) \delta[x - \xi(t)], \quad (1)$$

где ρA — масса единицы длины балки; $EI(x)$ — изгибная жесткость балки; $w(t)$ — функция вертикального перемещения балки; c — демпфирование балки; $\xi(t)$ — положение нагрузки в момент времени t ; $\delta[\cdot]$ — дельта-функция Дирака.

Представив балку длиной L как N сегментов, соединенных между собой вращательными пружинами (возможные места повреждений), податливость которых уменьшена на величину c_p , с линейной массой ρA , изгибной жесткостью $EI(x)$, которая соответствует бездефектному состоянию, и длиной l_i (рис. 1), уравнение движения (1) для каждого i -го сегмента можно записать следующим образом:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x_i, t)}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial w(x_i, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w(x_i, t)}{\partial x^4} = P_l(t) W[\xi_i(t), 0, l_i] \delta[x_i - \xi_i(t)], \quad (2)$$

где $W[\cdot]$ — вырезающая функция; ξ_i — положение подвижной нагрузки в момент времени t (в системе локальных координат), $0 < \xi_i < l_i$.

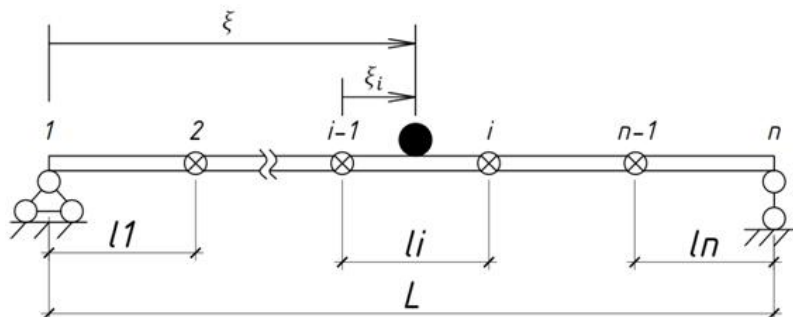


Рис. 1. Расчетная схема

Вырезающая функция определяется следующим уравнением:

$$W[\xi_i(t), 0, l_i] = H[\xi_i(t), 0] - H[\xi_i(t), l_i], \quad (3)$$

где $H[\cdot]$ — функция Хэвисайда.

Аналитического решения уравнения (2) нет. Приближенное решение может быть найдено путем разложения функции $w(t)$ на ряд функций в следующем виде:

$$w(x, t) \cong w^{(n)}(x, t) = \sum_{r=1}^n \varphi_r(x) q_r(t), \quad (4)$$

где переменные $q_r(t)$ необходимо вычислить.

Запишем граничные условия для случая балочного пролетного строения:

$$w_1(0, t) = w_N(l_N, t) = 0, \quad (5)$$

$$M_1(0, t) = M_N(l_N, t) = 0, \quad (6)$$

$$w_i(0, t) = w_{i-1}(l_{i-1}, t), \quad (7)$$

$$\vartheta_i(0, t) = \vartheta_{i-1}(l_{i-1}, t) + c_{i-1} M_{i-1}(l_{i-1}, t), \quad (8)$$

$$M_i(0, t) = M_{i-1}(l_{i-1}, t), \quad (9)$$

$$V_i(0, t) = V_{i-1}(l_{i-1}, t), \quad (10)$$

где $\vartheta(x, t)$, $M(x, t)$ и $V(x, t)$ — соответственно угол, крутящий момент и поперечная сила.

В основе поиска собственных значений и форм колебаний балочного пролетного строения моста с повреждениями лежит использование матриц переноса [5]. Данный подход предполагает, что для i -го сегмента балки Эйлера—Бернулли зависимость между левой и правой частью может быть записана следующим образом:

$$\begin{bmatrix} -w_i^R \\ \vartheta_i^R \\ M_i^R \\ V_i^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0(l_i, \gamma) & -t_1(l_i, \gamma) & -\frac{t_2(l_i, \gamma)}{EI} & -\frac{t_3(l_i, \gamma)}{EI} \\ \gamma^4 t_0(l_i, \gamma) & t_0(l_i, \gamma) & -\frac{t_1(l_i, \gamma)}{EI} & \frac{t_2(l_i, \gamma)}{EI} \\ -EI\gamma^4 t_2(l_i, \gamma) & EI\gamma^4 t_3(l_i, \gamma) & t_0(l_i, \gamma) & t_1(l_i, \gamma) \\ EI\gamma^4 t_1(l_i, \gamma) & EI\gamma^4 t_2(l_i, \gamma) & -\gamma^4 t_3(l_i, \gamma) & t_0(l_i, \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w_i^L \\ \vartheta_i^L \\ M_i^L \\ V_i^L \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Или в матричной форме как:

$$Z_i^R = U_i Z_i^L, \quad (12)$$

где U_i — матрица переноса; $\gamma^4 = \frac{\rho \omega^2}{EJ}$,

$t_0(x, y), t_1(x, y), t_2(x, y), t_3(x, y)$ — трансцендентные функции:

$$t_0 = \frac{1}{2}(\cos[\gamma x] + \cosh[\gamma x]); \quad (13)$$

$$t_1 = \frac{1}{2\gamma}(\sin[\gamma x] + \sinh[\gamma x]); \quad (14)$$

$$t_2 = \frac{1}{2\gamma^2}(\cos[\gamma x] + \cosh[\gamma x]); \quad (15)$$

$$t_3 = \frac{1}{2\gamma^3}(\sin[\gamma x] + \sinh[\gamma x]). \quad (16)$$

Таким образом, граничные перемещения и силы в сегменте могут быть представлены в виде внутренних зависимостей:

$$Z_i^L = Z_i Z_{i-1}^R, \quad (17)$$

где C_i — матрица 4×4:

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Начиная с правого конца балки, все сегменты могут быть соединены между собой так, что выполняется следующее условие:

$$Z_N = Z_N^R = U_{N-1} C_{N-1} U_{N-1} C_{N-1} \dots C_1 U_1 Z_1^L = A(\omega) Z_0. \quad (19)$$

По граничным условиям в соответствии с (5)–(10)

$$A(\omega) Z_0 = 0. \quad (20)$$

Собственные значения ω_r — корни трансцендентного уравнения:

$$\det[A(\omega)] = 0. \quad (21)$$

После того как детерминант матрицы найден, т.е. определены частоты собственных колебаний ω_i , с использованием одного из алгоритмов поиска корней по формулам (17) и (18) могут быть вычислены собственные функции колебаний балки, вместе с их производными до третьего порядка.

Неизвестное перемещение $w(x, t)$ записывается как ряд собственных функций балки:

$$w(x_i, t) \cong \sum_{r=1}^n \varphi_{ir}(x_i) q_r(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (22)$$

в котором приближенное значение соответствует ряду округлений. Таким образом, становится возможным вычислить неизвестные коэффициенты в $q_r(t)$, зависящие от времени t . Сила взаимодействия балки и движущегося транспортного средства (не принимая во внимание время) записывается как:

$$f_i(t) = m \left\{ g - \sum_{r=1}^n \varphi_{ir}(\xi_i) \frac{\partial^2 q_r(t)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \frac{\partial q_r(t)}{\partial t} \frac{\partial \varphi_{ir}(\xi_i)}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_{ir}(\xi_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi(t)}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi_{ir}(\xi_i)}{\partial x} \right] q_r(t) \right\}. \quad (23)$$

Ортонормируемые зависимости для случая балочного пролетного строения следующие:

$$\sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} \varphi_{is}(x_i) \rho \varphi_{ir}(x_i) dx_i = \delta_{sr}, \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} \varphi_{is}(x_i) c \varphi_{ir}(x_i) dx_i = 2\zeta_i \omega_i \delta_{sr}, \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} \varphi_{is}(x_i) EI \varphi_{ir}^{IV}(x_i) dx_i = \omega_s^2 \delta_{sr}, \quad (26)$$

где δ_{sr} — символ Кронекера.

Интегрируя уравнение (2) по $\int_0^{l_i} \varphi_{is}(x_i) [\cdot] dx_i$ и суммируя по N сегментам с учетом ортонормируемых связей, получим

$$\frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + 2\zeta_i \omega_i \frac{dq_i(t)}{dt} + \omega_i^2 q_i(t) = F_s(t), \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

где ζ_i — i -й декремент затуханий; ω_i — i -я частота собственных колебаний,

$$\begin{aligned} F_s(t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} \varphi_{is}(x_i) f_i(t) W[\xi_i(t), 0, l_i] \delta[x_i - \xi_i(t)] dx_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \varphi_{is}(x_i) [\xi_i(t)] f_i(t) W[\xi_i(t), 0, l_i]. \end{aligned} \quad (28)$$

Путем подстановки (23) в (28) получим

$$\begin{aligned} F_s(t) &= m \phi_s[\xi(t)] \left\langle g - \sum_{r=1}^n \phi_r[\xi(t)] \frac{\partial^2 q_r(t)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \phi_r'[\xi(t)] \frac{\partial q_r(t)}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \right)^2 \phi_r''[\xi(t)] + \frac{\partial^2 o(t)}{\partial t^2} \phi_r'[o(t)] \right] q_r(t) \right\rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

где ' и '' — дифференцирование по x один и два раза соответственно.

Уравнение движения с учетом ортонормируемых зависимостей будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^n \langle \delta_{sr} + m \phi_s[\xi(t)] \phi_r[\xi(t)] \rangle \frac{\partial^2 q_r(t)}{\partial t^2} + \\ &+ \langle 2\zeta_i \omega_i \delta_{sr} + 2m \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \phi_s[\xi(t)] \phi_r'[\xi(t)] \rangle \frac{\partial q_r(t)}{\partial t} + \\ &+ \langle \omega_s^2 \delta_{sr} + m \phi_s[\xi(t)] \cdot \left[\left(\frac{\partial o(t)}{\partial t} \right)^2 \phi_r''[\xi(t)] + \frac{\partial^2 o(t)}{\partial t^2} \phi_r'[\xi(t)] \right] q_r(t) \rangle = \\ &= mg \phi_s[\xi(t)]. \end{aligned} \quad (30)$$

Уравнение (30) можно записать в матричной форме

$$M(t) \ddot{q}(t) + D(t) \dot{q}(t) + K(t) q(t) = mg \Phi_0[\xi(t)], \quad (31)$$

где $q(t)$ — n -мерный вектор неизвестных $q_r(t)$,

$$\Phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]^T, \quad (32)$$

а матрицы $M(t)$, $D(t)$, $K(t)$ записываются как:

$$M(t) = I_n + m \Phi^T[\xi(t)] \Phi[\xi(t)], \quad (33)$$

$$D(t) = C + 2m \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \Phi^T[\xi(t)] \Phi'[\xi(t)], \quad (34)$$

$$K(t) = \Omega^2 + m\Phi^T[\xi(t)] \left[\left(\frac{\partial \xi(t)}{\partial t} \right)^2 \Phi''[\xi(t)] + \frac{\partial^2 \xi(t)}{\partial t^2} \Phi'[\xi(t)] \right], \quad (35)$$

где I_n — единичная матрица размерностью $n \times n$; $C = \text{diag}[2\zeta_i \omega_i]$; $\Omega^2 = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2]$.

Подставляя граничные условия, можно найти численное решение уравнения, например, методом Рунге—Кутты.

После вычисления вектора $q(t)$ определим отклик конструкции по следующим зависимостям:

$$w(x, t) = \Phi^T(x)q(t), \quad (36)$$

$$\vartheta(x, t) = \Phi^{T'}(x)q(t), \quad (37)$$

$$M(x, t) = -EI\Phi^{T''}(x)q(t), \quad (38)$$

$$V(x, t) = -EI\Phi^{T'''}(x)q(t). \quad (39)$$

Если подставить в (32) вместо переменной x координату $\xi(t)$, т.е. положение массы в момент времени t , можно вычислить вертикальные перемещения точки контакта по формуле (36).

Численный эксперимент

Для проведения численного эксперимента выбрана балка прямоугольного сечения со следующими характеристиками:

- 1) ширина сечения — $a = 0,5$ м;
- 2) высота сечения — $b = 1$ м;
- 3) длина балки — $L = 50$ м;
- 4) модуль упругости материала балки — $E = 210$ ГПа;
- 5) плотность материала балки — $\rho = 23,54$ кН/м³.

Масса движущейся по балке массы равна 10 кН.

Скорость движения массы составляет 1, 2, 4, 6, 8 и 10 м/с.

Рассмотрены следующие варианты расположения и степени развития повреждения:

1. На расстоянии 15 м от левого конца балки:
 - а) уменьшение сечения до 0,6 полной высоты балки;
 - б) уменьшение сечения до 0,4 полной высоты балки.
2. На расстоянии 25 м от левого конца балки:
 - а) уменьшение сечения до 0,6 полной высоты балки;
 - б) уменьшение сечения до 0,4 полной высоты балки.
3. На расстоянии 35 м от левого конца балки:
 - а) уменьшение сечения до 0,6 полной высоты балки;
 - б) уменьшение сечения до 0,4 полной высоты балки.

Податливость вращательных пружин вычислена по формуле

$$C_c = \frac{1}{k} = \frac{2h}{EI} \left(\frac{\delta}{1-\delta} \right)^2 [5,93 - 16,69\delta + 37,14\delta^2 - 35,84\delta^3 + 13,12\delta^4],$$

где δ — степень развития повреждения ($0h \leq \delta \leq 1h$) [6].

Вычисленные максимальные вертикальные перемещения точки контакта движущейся массы с балкой с различными повреждениями приведены в табл. 1–7. Сравнение вертикальных перемещений точки контакта массы с балкой показало, что введение в уравнение движения демпфирования уменьшило максимальные прогибы. Величина демпфирования влияет на характер колебаний — так, например, график вертикальных перемещений точки контакта сглаживается (рис. 2).

Таблица 1

**Максимальные вертикальные перемещения точки контакта.
Балка без повреждений**

Декремент	$V = 1$ м/с	$V = 2$ м/с	$V = 4$ м/с	$V = 6$ м/с	$V = 8$ м/с	$V = 10$ м/с
$\zeta_i = 0$	2,97E-03	3,00E-03	3,06E-03	3,12E-03	3,17E-03	3,04E-03
$\zeta_i = 0,02$	2,94E-03	2,95E-03	3,00E-03	3,05E-03	3,10E-03	2,98E-03
$\zeta_i = 0,05$	2,94E-03	2,94E-03	2,96E-03	2,99E-03	3,04E-03	2,92E-03

Таблица 2

Максимальные вертикальные перемещения точки контакта. Вариант 1.a

Декремент	$V = 1$ м/с	$V = 2$ м/с	$V = 4$ м/с	$V = 6$ м/с	$V = 8$ м/с	$V = 10$ м/с
$\zeta_i = 0$	3,02E-03	3,05E-03	3,13E-03	3,19E-03	3,25E-03	3,07E-03
$\zeta_i = 0,02$	2,99E-03	3,00E-03	3,06E-03	3,12E-03	3,18E-03	3,00E-03
$\zeta_i = 0,05$	2,99E-03	2,99E-03	3,02E-03	3,06E-03	3,11E-03	2,95E-03

Таблица 3

Максимальные вертикальные перемещения точки контакта. Вариант 1.b

Декремент	$V = 1$ м/с	$V = 2$ м/с	$V = 4$ м/с	$V = 6$ м/с	$V = 8$ м/с	$V = 10$ м/с
$\zeta_i = 0$	3,20E-03	3,23E-03	3,31E-03	3,39E-03	3,49E-03	3,22E-03
$\zeta_i = 0,02$	3,16E-03	3,18E-03	3,23E-03	3,31E-03	3,40E-03	3,17E-03
$\zeta_i = 0,05$	3,16E-03	3,16E-03	3,18E-03	3,24E-03	3,31E-03	3,13E-03

Таблица 4

Максимальные вертикальные перемещения точки контакта. Вариант 2.a

Декремент	$V = 1$ м/с	$V = 2$ м/с	$V = 4$ м/с	$V = 6$ м/с	$V = 8$ м/с	$V = 10$ м/с
$\zeta_i = 0$	3,04E-03	3,08E-03	3,15E-03	3,21E-03	3,26E-03	3,06E-03
$\zeta_i = 0,02$	3,02E-03	3,03E-03	3,08E-03	3,14E-03	3,19E-03	3,00E-03
$\zeta_i = 0,05$	3,02E-03	3,02E-03	3,04E-03	3,08E-03	3,12E-03	2,96E-03

Таблица 5

Максимальные вертикальные перемещения точки контакта. Вариант 2.b

Декремент	$V = 1$ м/с	$V = 2$ м/с	$V = 4$ м/с	$V = 6$ м/с	$V = 8$ м/с	$V = 10$ м/с
$\zeta_i = 0$	3,29E-03	3,29E-03	3,40E-03	3,50E-03	3,57E-03	3,11E-03
$\zeta_i = 0,02$	3,27E-03	3,26E-03	3,33E-03	3,41E-03	3,49E-03	3,09E-03
$\zeta_i = 0,05$	3,27E-03	3,27E-03	3,29E-03	3,35E-03	3,41E-03	3,13E-03

Таблица 6

Максимальные вертикальные перемещения точки контакта. Вариант 3.a

Декремент	$V = 1$ м/с	$V = 2$ м/с	$V = 4$ м/с	$V = 6$ м/с	$V = 8$ м/с	$V = 10$ м/с
$\zeta_i = 0$	3,02E-03	3,06E-03	3,12E-03	3,18E-03	3,23E-03	3,10E-03
$\zeta_i = 0,02$	2,99E-03	3,01E-03	3,05E-03	3,11E-03	3,16E-03	3,03E-03
$\zeta_i = 0,05$	2,99E-03	2,99E-03	3,01E-03	3,05E-03	3,09E-03	2,98E-03

Таблица 7

Максимальные вертикальные перемещения точки контакта. Вариант 3.б

Декремент	$V = 1$ м/с	$V = 2$ м/с	$V = 4$ м/с	$V = 6$ м/с	$V = 8$ м/с	$V = 10$ м/с
$\zeta_i = 0$	3,19E-03	3,23E-03	3,30E-03	3,36E-03	3,42E-03	3,26E-03
$\zeta_i = 0,02$	3,16E-03	3,18E-03	3,23E-03	3,29E-03	3,35E-03	3,19E-03
$\zeta_i = 0,05$	3,16E-03	3,16E-03	3,19E-03	3,23E-03	3,27E-03	3,13E-03

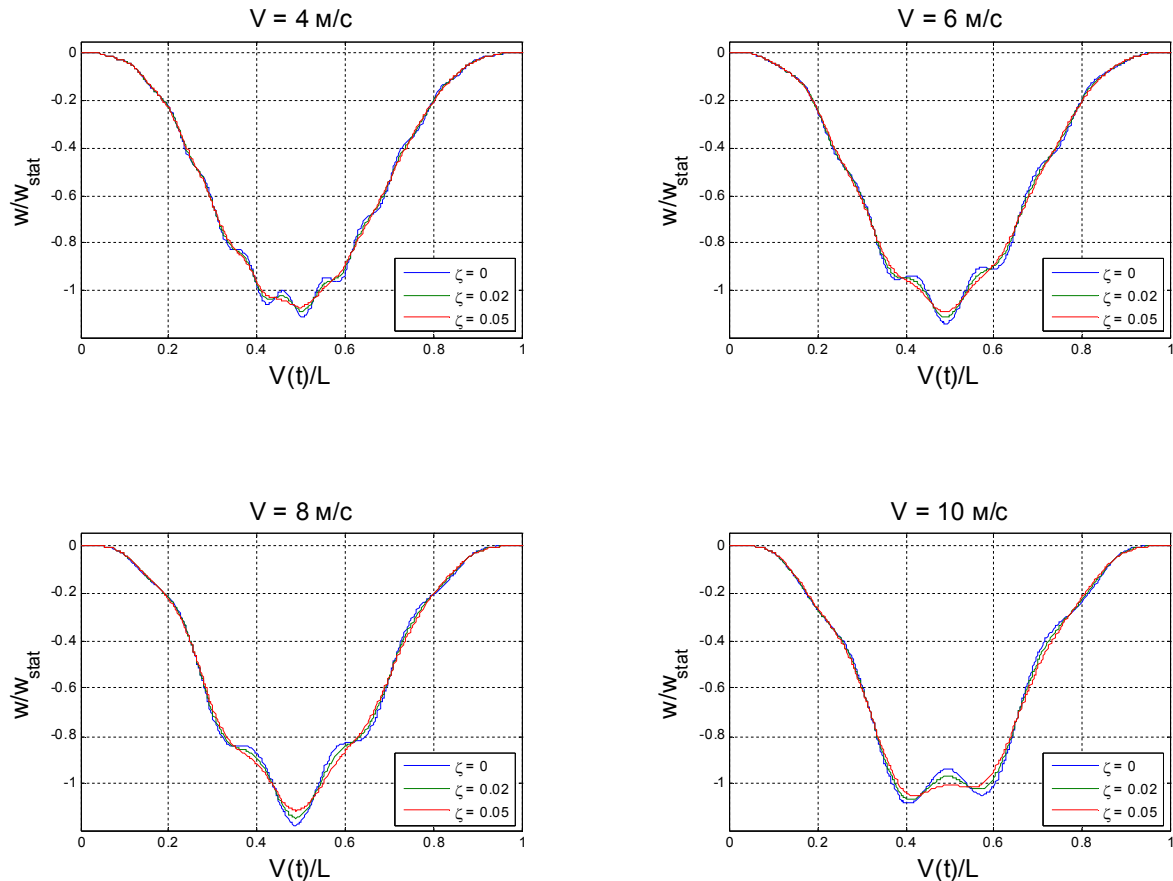


Рис. 2. Вертикальные перемещения точки контакта. Вариант 1.б

Выводы

Проведено исследование поведения шарнирно-опертой балки Эйлера—Бернулли с повреждениями, по которой движется масса, с учетом демпфирования. Установлено, что влияние, оказываемое демпфированием в балке, проявляется при высоких скоростях движения массы: график вертикальных перемещений сглаживается, а максимальные амплитуды колебаний уменьшаются.

В результате получено более точное описание взаимодействия системы «балка с повреждениями — движущаяся масса», позволяющее вычислить отклики массы и балки с учетом всех физических характеристик материала балки. Вычисленные амплитуды колебаний при этом более точны и приближены к реальным амплитудам.

Полученные теоретические результаты могут быть использованы для моделирования поведения реальных пролетных строений мостов с повреждениями при движении по ним различных нагрузок. Учет демпфирования особенно важен при динамических расчетах железнодорожных пролетных строений мостов с ездой на балласте, который оказывает значительное влияние на характер колебаний.

Установлено, что наличие повреждений в пролетных строениях мостов ведет к росту коэффициента демпфирования. Поэтому его учет также важен при моделировании и исследовании динамики несущих конструкций мостов.

Библиографический список

1. Vibration of damaged beams under a moving mass: theory and experimental validation / C. Bilello, L. A. Bergman // Journal of Sound and Vibration. 2004. V. 274. № 3–5. P. 567–582.
2. One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams / S. Christides, A. D. S. Barr // International Journal of Mechanical Sciences. 1984. V. 26. № 11–12. P. 639–648.
3. Dynamic response of a beam with a crack subject to a moving mass / M. A. Mahmoud, M. A. Abou Zaid // Journal of Sound and Vibration. 2002. V. 256. № 4. P. 591–603.
4. Dynamic deflection of a cracked shaft subjected to moving mass / D. R. Parhi, A. K. Behera // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. 1997. V. 21. P. 295–316.
5. Matrix methods in elastomechanics / E. C. Pestel, F. A. Leckie. New York, McGraw-Hill, 1963.
6. The Stress Analysis of Cracks Handbook, Third Edition / H. Tada, P. C. Paris, G. R. Irwin: ASME Press, 2000. 696 p.
7. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975.

N.A. Donets, A.N. Donets. **Damping Calculations at Modeling of a Damaged Beam with a Movable Load Interaction.**

In the work analytical modeling of the interaction of a damaged Euler-Bernoulli hinged beam and a movable load is considered. Damping effects allow obtaining more precise results. Numerical experiment proves that the damping influence occurs at high velocity of a movable load.

Key words: *dynamics, damaged beam, movable load, damping.*