

Метод расчета собственных частот составных тел с плоским стыком

Предлагается метод расчета собственных частот составных тел на стадии проектирования, основанный на представлении плоского стыка в виде условного упругого контактного слоя, подчиняющегося закону Гука. Поперечная и угловая жесткость слоя выражается через продольную жесткость, которую вычисляют с использованием формул Н.Б. Демкина или А.С. Иванова для упругого сближения тел в стыке. Эффективность метода подтверждается сравнением расчетных и экспериментальных значений собственных частот составных тел при двух методиках расчета упругих сближений в плоском стыке.

Ключевые слова: *составное тело, плоский стык, упругий контактный слой, контактная жесткость слоя, собственные частоты составных тел.*

Различные приборы, устройства, приспособления (далее – изделия) нередко имеют плоские установочные поверхности и крепятся на жестких несущих конструкциях машин (далее – несущие тела) с помощью резьбовых соединений.

Типичными примерами таких составных конструкций с плоскими затянутыми стыками являются станочные приспособления, закрепленные на рабочих столах станков [1], испытываемые изделия на столах вибростендов, виброизмерительные преобразователи (датчики) на объектах исследования [2]. Усилия сжатия плоских стыков выбирают так, чтобы при максимальных динамических воздействиях не происходило раскрытия стыков.

Сжатые стыкуемые поверхности из-за шероховатости, волнистости и неплоскостности соприкасаются друг с другом не по всей номинальной площади стыка, а по отдельным случайно расположенным точкам фактического контакта. Жесткость многих составных конструкций определяется в основном жесткостью стыков. При этом на долю контактных деформаций в стыках жестких составных тел приходится до 90 % всех упругих перемещений [3].

Изделия, закрепляемые на несущих телах, во многих случаях подвергаются интенсивным динамическим воздействиям в широком диапазоне частот. Для общего машиностроения характерны вибрации до 1 кГц [4], для бортовой радиоаппаратуры и приборов – до 2 кГц, для изделий электронной техники – до 5 кГц [2].

При создании высокоточных машин, приборов и аппаратуры очень важным является расчетное определение установочных резонансных частот их крепления на несущих телах на стадии проектирования. Это позволяет принять специальные конструктивные меры по повышению жесткости и демпфированию затянутых стыков составных конструкций.

При измерении пространственной вибрации знание поперечных установочных резонансных частот крепления датчика ускорений позволяет избежать больших (более 50 %) систематических ошибок измерения компонент ускорения. Например, по паспортным данным пьезодатчик (пьезоэлектрический акселерометр) типа 4370 фирмы «Брюль и Кьер» (рис. 1, а) имеет малую паразитную поперечную чувствительность, не превышающую 4 %, в рабочем диапазоне частот от 0,2 до 6 000 Гц.

По экспериментальным данным (рис. 1, б) [5] измеренная низшая поперечная собственная частота закрепленного датчика составляет 3,8 кГц. На этой частоте по-

перечная чувствительность датчика возрастает до 80 %. В этом случае при измерении пространственной вибрации выше 600 Гц датчик, фактически, перестает быть измерительным прибором с нормируемой чувствительностью, не превышающей 4 %.

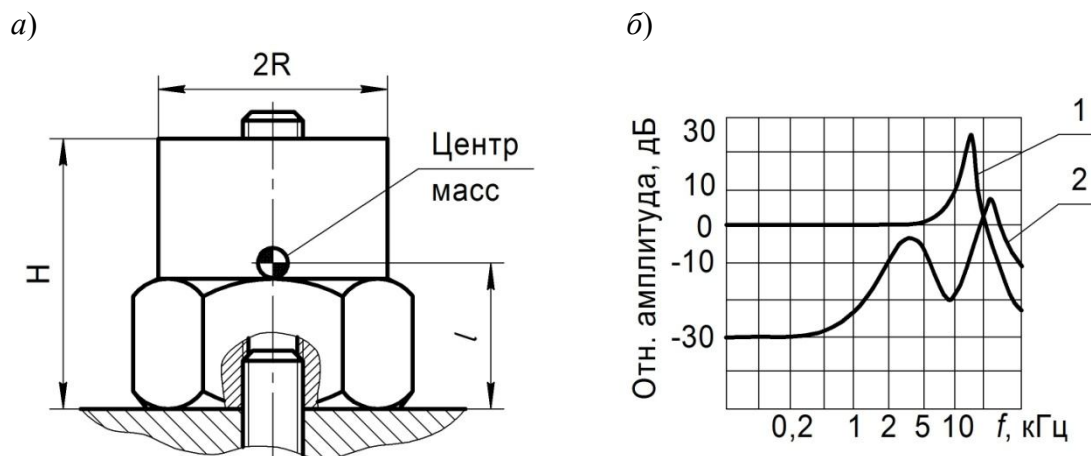


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики закрепленного датчика типа 4370 в рабочем (1) и поперечном (2) направлениях:

а – схема крепления; б – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) закрепленного датчика

Установочные поперечные резонансные частоты датчика, закрепленного на объекте, в паспортных данных не приводятся. Экспериментальное определение этих частот требует специального оборудования. Поэтому наиболее удобным является расчет поперечных резонансных частот, позволяющий произвести объективную оценку рабочего диапазона частот закрепленного на объекте датчика при измерении пространственной вибрации.

Принципиальная сложность расчета собственных частот пространственных колебаний составных тел в системе «изделие – несущее тело» обусловлена тем, что неизвестны упругие характеристики затянутых стыков в составных конструкциях. Известно, что в точках фактического контакта стыкуемых поверхностей при затяжке стыка образуются материальные мостики, которые и определяют упругие свойства стыка [3]. Экспериментальные исследования показывают, что после повторной затяжки стыков их упругие свойства стабилизируются. Эти свойства близки к линейным при сдвиге и угловых смещениях тел в стыке [3, 4]. Зависимость упругого сближения стыкуемых поверхностей в повторно затянутом стыке, в котором действуют переменные силы, в первом приближении в области малых колебаний также можно считать линейными [3].

Анализ совокупности экспериментальных данных о контактной жесткости стыков позволил предложить расчетную схему затянутого стыка в виде упругого контактного слоя, который полностью прилегает к абсолютно твердым поверхностям стыкуемых тел (рис. 2) [6]. Если при этом принять, что в случае малых свободных колебаний упругий контактный слой в первом приближении подчиняется закону Гука, то коэффициенты поперечной линейной K_x и угловой K_φ , K_θ жесткости можно выразить через коэффициент продольной (нормальной) жесткости K_y .

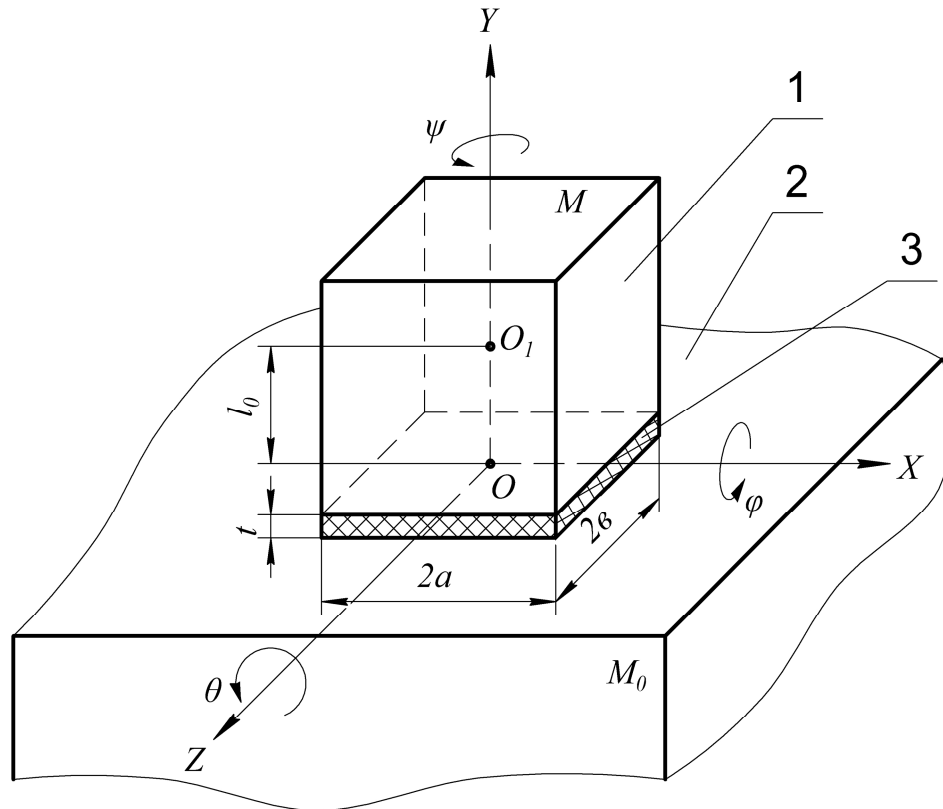


Рис. 2. Расчетная схема составной конструкции с плоским контактным слоем:
1 – изделие, закрепленное на несущем теле 2; 3 – условный упругий контактный слой

Указанные зависимости для прямоугольного (см. рис. 2) и кругового (см. рис. 1, а) стыков имеют вид:

$$K_x = K_z = \frac{K_y}{2(1+\mu)}; \quad K_\theta = \frac{K_y a^2}{3}; \quad K_\varphi = \frac{K_y b^2}{3}; \quad K_\theta = \frac{K_y R^2}{4}, \quad (1)$$

где μ – коэффициент Пуассона контактного слоя, который целесообразно принять равным коэффициенту Пуассона более мягкого из материалов стыкуемых поверхностей [6, 7].

Из формул (1) следует, что после количественного определения продольной жесткости полностью определяются другие коэффициенты жесткости контактного слоя.

На рис. 3 приведена расчетная схема для определения собственных частот симметричной составной конструкции с плоским затянутым стыком. Условный упругий контактный слой представлен совокупностью упругих элементов, приложенных в центре жесткости контактного слоя – точке O . Эта точка в положении равновесия тела 1 совпадает с начальной точкой инерциальной системы отсчета XOY . Центр жесткости O не совпадает с центром масс C тела 1, которое представляет, по существу, перевернутый физический маятник на упругом подвесе.

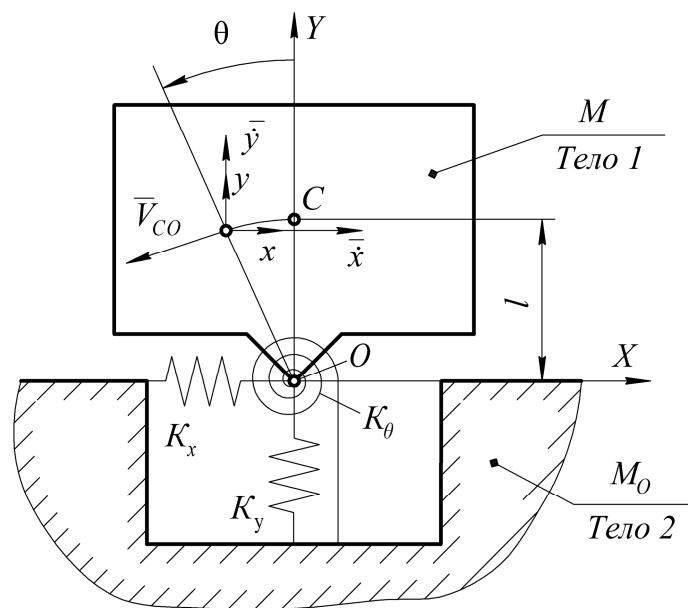


Рис. 3. Расчетная схема для определения собственных частот составной конструкции при плоских колебаниях

Для определения собственных частот составных тел необходимы дифференциальные уравнения малых колебаний этих тел [8].

При выводе дифференциальных уравнений и расчетных формул для собственных частот считаем, что контактный слой является однородным и поэтому он имеет главный центр жесткости. Две взаимно ортогональные оси жесткости будут лежать в плоскости стыка, а третья ось ортогональна стыку. Это позволяет в общем случае заменить контактный слой шестью упругими элементами с известными коэффициентами жесткости. В результате низшие собственные частоты колебаний состыкованных тел можно определять, используя расчетные модели состыкованных тел в виде абсолютно твердых тел, соединенных упругими элементами с известными сосредоточенными параметрами в центре жесткости контактного слоя. Если стыкуемые тела имеют ось симметрии, перпендикулярную плоскости стыка, то центр жесткости лежит на оси симметрии.

Рассмотрим практически важный случай пространственных колебаний составных тел с плоским затянутым стыком, когда эти колебания можно представить в виде независимых плоских колебаний в двух взаимно ортогональных направлениях [2]. Кинетическая энергия T тела I на упругом подвесе:

$$T = \frac{M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + M(\vec{\dot{x}} + \vec{\dot{y}}) \times \vec{V}_{CO} + T_r, \quad (2)$$

где M – масса тела I ; $\vec{\dot{x}}$, $\vec{\dot{y}}$ – абсолютные скорости поступательного движения тела I ; $\vec{V}_{CO}$ – скорость центра масс тела I при его угловых маятниковых колебаниях относительно оси, проходящей через центр жесткости; $T_r = I_O \dot{\theta}^2 / 2$ – кинетическая энергия тела I в относительном движении при его угловых колебаниях по θ ; I_O – момент инерции тела относительно центра жесткости O .

Учитывая, что $\vec{V}_{CO} = \dot{\theta} \vec{l}$, из (2) получим

$$T = \frac{M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} - M\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta - M\dot{y}\dot{\theta}l \sin \theta + \frac{I_O \dot{\theta}^2}{2}. \quad (3)$$

Потенциальная энергия упругого контактного слоя при его деформации:

$$\Pi = \frac{K_x x^2}{2} + \frac{K_y y^2}{2} + \frac{K_\theta \theta^2}{2}. \quad (4)$$

Для вывода дифференциальных уравнений свободных колебаний тела без учета затухания используем уравнения Лагранжа II рода [7] в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad (5)$$

где q_i – i -я обобщенная координата; $\dot{q}_i$ – i -я обобщенная скорость.

В нашем случае в качестве обобщенных координат выбраны смещения центра жесткости ($q_1 = y$, $q_2 = x$) и угловые повороты тела I ($q_3 = \theta$) вокруг оси, проходящей через центр жесткости O . Подставляя (3), (4) в (5) и пренебрегая нелинейными членами, получим систему линейных дифференциальных уравнений, описывающих малые свободные колебания тела I :

$$\begin{cases} M\ddot{y} + K_y y = 0, \\ M\ddot{x} + K_x x - M\ddot{\theta} = 0, \\ I_O \ddot{\theta} + K_\theta \theta - M\ddot{x} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Из дифференциальных уравнений (6) находим по известной методике [7] угловую собственную частоту ω_y тела I в продольном направлении и частоты взаимосвязанных собственных колебаний в поперечном направлении $\omega_{x,\theta}$, $\omega_{\theta,x}$.

Свободные малые колебания в продольном направлении по y являются независимыми от взаимосвязанных поперечных колебаний.

Собственные частоты свободных колебаний определяются по формулам:

$$\omega_y^2 = \frac{K_y}{M}, \quad \omega_{x,\theta}^2 = \frac{I_O K_x + M K_\theta \pm \sqrt{(I_O K_x - M K_\theta)^2 + 4 K_x K_\theta M^2 l^2}}{2M(I_O - M l^2)}. \quad (7)$$

При выдвинутых выше гипотезах коэффициенты жесткости K_x и K_θ всегда могут быть выражены через коэффициент продольной жесткости (1). Это позволяет найти соотношения между собственными частотами, используя формулы (7). Если известна одна из собственных частот составной конструкции, то можно оценить другие собственные частоты, не зная величины коэффициента продольной жесткости [6].

В общем случае расчет установочных собственных частот в составной системе «изделие – несущее тело» следует осуществлять в четыре этапа:

- 1) определение общего усилия статической затяжки стыка;
- 2) определение продольного (нормального) упругого сближения стыкуемых поверхностей, сжатых известной силой;
- 3) количественное определение коэффициентов жесткости контактного слоя, приведенных к его центру жесткости;
- 4) определение собственных частот пространственных колебаний составной конструкции при известных коэффициентах жесткости методами теоретической механики и теории колебаний.

На первом этапе расчета определяется абсолютное сближение поверхностей в стыке под действием нормальной сжимающей силы. Нормальную силу сжатия в стыке можно определить по формуле

$$N = k \cdot 10^3 \frac{2M_{\text{зат}}}{s} \pi \beta, \quad (8)$$

где k – количество резьбовых соединений, стягивающих стык; $M_{\text{зат}}$ – момент затяжки, Н·м; s – шаг резьбы, мм; β – коэффициент, характеризующий долю крутящего момента затяжки, создающего силу сжатия стыка с учетом трения в резьбе [9].

При ручной затяжке отверткой составных тел одним винтом М5 с шагом резьбы $s = 0,8$ мм момент затяжки составляет приблизительно 1 Н·м. В этом случае при $\beta = 0,06$ с помощью формулы (8) получаем нормальную силу сжатия стыка $N^{(1)} \approx 500$ Н. Далее верхний индекс в скобках будет означать количество винтов k , используемых для затяжки стыка. Рекомендующий момент затяжки для датчика типа 4370 фирмы «Брюль и Кьер» составляет 1,76 Н·м [5]. Тогда соответствующая сила сжатия стыка составит: $N \approx 900$ Н.

На втором этапе необходимо определить величину продольного (нормального) упругого сближения стыкуемых поверхностей тел при повторном сжатии известной силой, определенной на первом этапе.

Для приближенного расчета упругого сближения поверхностей составных тел в затянутом стыке Н.Б. Демкиным [10] и А.С. Ивановым [11] были предложены две инженерные методики. В нашей работе [7] при определении упругого сближения поверхностей использовались формулы Н.Б. Демкина. Их основным недостатком является то, что при расчете упругого сближения стыкуемых поверхностей не используются непосредственно параметры шероховатости и неплоскостности, которые задаются конструктором в чертежах. Этот недостаток можно исправить, если при расчете упругого сближения a стыкуемых поверхностей использовать формулу, предложенную А.С. Ивановым [11]:

$$\frac{a}{Ra} = c_0 \varepsilon \left(\frac{p}{E} \right)^{0,5}, \quad (9)$$

где $Ra = (Ra_1 + Ra_2)/2$ – средняя арифметическая высота микронеровностей контактирующих поверхностей; c_0 – безразмерный параметр, зависящий от вида и направления следов обработки поверхностей ($c_0 = 160$ для параллельных следов и $c_0 = 500$ для непараллельных следов обработки); ε – коэффициент влияния масштаба; p – номинальное давление в затянутом стыке от действия силы сжатия; $E = 2E_1E_2/(E_1 + E_2)$ – приведенный модуль упругости.

В приведенных ниже расчетах с использованием формулы (9) в соответствии с рекомендациями работы [10] принято: $c_0 = 500$, $\varepsilon = 0,6$.

Расчеты упругого сближения по формулам Н.Б. Демкина и А.С. Иванова и последующее определение на четвертом этапе расчета установочных собственных частот по формулам (7) проводились для трех видов составных тел:

- алюминиевого куба из сплава Д16 с размером грани 50 мм, закрепленного на рабочем столе (материал стола – сплав Д16) образцового электродинамического возбудителя (ЭДВ) (рис. 4);
- латунного цилиндра радиусом $R = 20$ мм и высотой $H = 32$ мм (рис. 5, а), закрепленного на алюминиевом столе ЭДВ;
- датчика типа 4370 фирмы «Брюль и Кьер» в стальном корпусе, закрепленного на стальном кубике массой 180 г (рис. 5, б) [5].

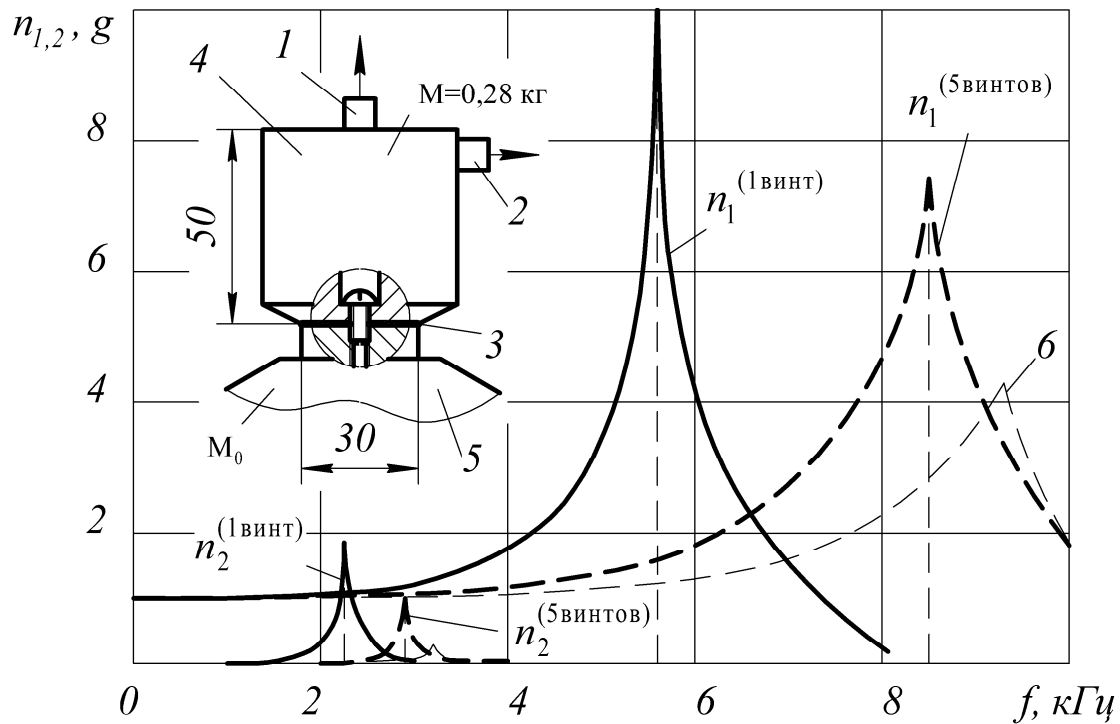


Рис. 4. Эксперимент по определению установочных резонансов куба:
1 и 2 – измерительные точки; 3 – стык; 4 – куб; 5 – подвижная часть ЭДВ; 6 – АЧХ куба с прокладкой в стыке из полиэтиленовой пленки толщиной 0,05 мм

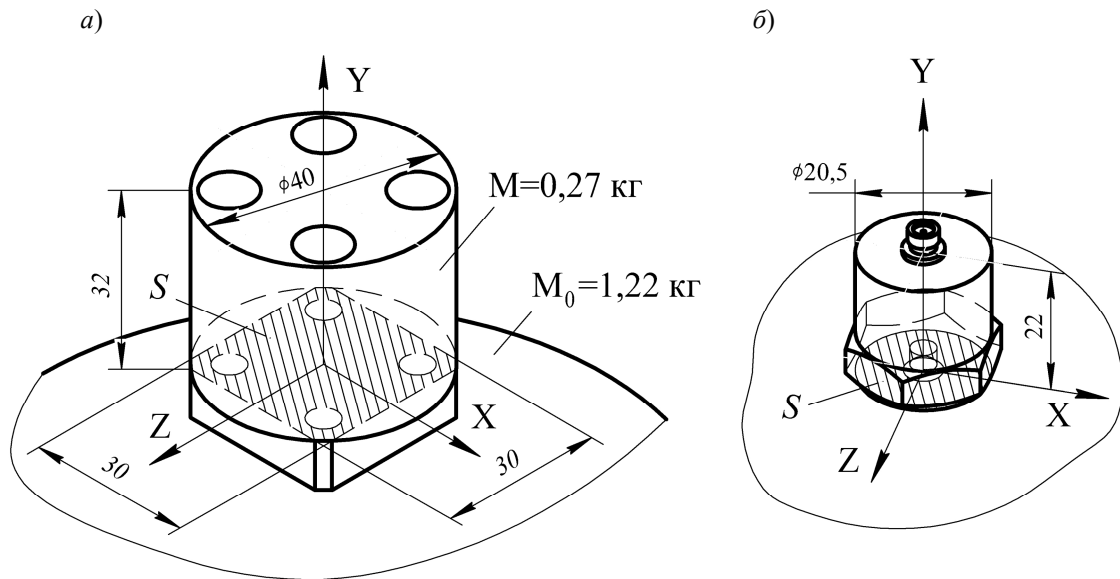


Рис. 5. Пристыкованные тела: а – латунный цилиндр; б – датчик типа 4370

Параметр шероховатости Ra всех стыкуемых поверхностей принимался равным 1,25 мкм, поскольку такая шероховатость рекомендуется для стыкуемых поверхностей точных приборов, например датчиков ускорений [5].

На третьем этапе коэффициент продольной жесткости K_y определялся по формуле $K_y = N/a$. Коэффициенты поперечной K_x и угловой жесткости K_θ рассчитывались по формулам (1). Коэффициент Пуассона μ для всех материалов принимался равным 0,3.

Результаты первых трех этапов расчета показаны в табл. 1.

Таблица 1

**Промежуточные результаты расчетов коэффициентов
жесткости упругого контактного слоя**

Этап	Параметр	Куб из алюминиевого сплава Д16 (см. рис. 4)				Цилиндр из латуни (см. рис. 5, а)		Датчик 4370 (см. рис. 1 и 5, б)	
1	Способ крепления	1 винт М5		5 винтов М5		4 винта М5		1 шпилька М5	
	Метод расчета сближения	[10]	[11]	[10]	[11]	[10]	[11]	[10]	[11]
	Усилие затяжки N , Н	500		2500		2000		900	
2	Площадь S , м ²	9·10 ⁻⁴						3,3·10 ⁻⁴	
	Давление в стыке p , МПа	0,55		2,7		2,2		2,7	
	Сближение a , мкм	1,9	1,1	3,0	2,4	2,5	2,6	2,7	1,3
3	K_y (·10 ⁸), Н/м	2,6	4,5	8,3	10,4	8,0	7,7	3,3	6,9
	K_x , Н/м	$K_x = 0,39K_y$ (для коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$)							
	K_θ , Н/м	$K_\theta = 3 \cdot 10^{-4} K_y$				$K_\theta = 1 \cdot 10^{-4} K_y$		$K_\theta \approx 3 \cdot 10^{-5} K_y$	

По формулам (7) на четвертом этапе находим собственные частоты пространственных колебаний рассматриваемых составных конструкций. При этом использовались следующие формулы для моментов инерции относительно оси OZ (см. рис. 2):

– для тела в виде куба $I_0 = M \left(\frac{5l_0^2}{3} \right)$, где $l_0 = O_1O$ – расстояние от центра масс

тела до плоскости стыка;

– для тела в виде сплошного однородного цилиндра $I_0 = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right)$.

Результаты расчетов по формулам (7) установочных собственных частот тела 1, пристыкованного к телу 2, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетных и экспериментальных значений установочных продольных и поперечных резонансных частот составных тел с плоским затянутым стыком, кГц

Направление собственных колебаний	Методика расчета уп- ругого сбли- жения	Куб из алюминиевого сплава Д16 ($M = 0,285$ кг)				Цилиндр из лату- ни ($M = 0,27$ кг)		Датчик 4370 ($M = 0,054$ кг)	
		Способ крепления							
		1 винт М5		5 винтов М5		4 винта М5		1 шпилька М5	
		$f_{расч}$	$f_{эксп}$	$f_{расч}$	$f_{эксп}$	$f_{расч}$	$f_{эксп}$	$f_{расч}$	$f_{эксп}$
Продольное	[10]	5,3	5,6	9,5	8,5	9,6	10,6	12,4	18,0
	[11]	6,6		9,9		9,4		18,0	
Поперечное	[10]	2,0	2,2	3,5	2,9	4,0	3,7	4,3	4,4
	[11]	2,0		3,5		3,9		6,3	

Формулы (7) для расчета установочных собственных частот тела 1, прикрепленного к телу 2, получены при условии, что взаимным влиянием колебаний этих тел можно пренебречь. Это допустимо, если масса M_0 тела 2 не менее чем на порядок превышает массу M тела 1. В этом случае погрешность измерения собственной частоты тела 1 не превысит 5 %. При проведении эксперимента на комплексе физического моделирования [2] условие $M_0 \geq 10M$ выполнить не удалось. Масса подвижной части ЭДВ комплекса составляет 1,22 кг. Масса несущего тела в экспериментах с датчиком типа 4370 «Брюль и Кьер» составляет 180 г [5]. Поэтому в изме-

ряемые значения собственных частот $f_{\text{изм}}$ вносились поправки [7] с учетом соотношения масс состыкованных тел по формуле

$$f_{\text{эсп}} = f_{\text{изм}} \sqrt{1 + M_0/M}.$$

Из табл. 2 следует, что расчетные и экспериментальные значения собственных частот различаются не более чем на 30 % при точности измерения частот ± 5 %.

Таким образом, предлагаемый метод расчета позволяет на стадии проектирования проводить количественные оценки резонансных частот пространственных колебаний составных тел с плоским затянутым стыком с разумной погрешностью, не превышающей 30 %. При расчете упругого сближения предпочтение следует отдавать формуле (9), предложенной А.С. Ивановым [11]. Это значительно упрощает вычисления без существенной потери точности.

Библиографический список

1. Ильицкий В.Б., Микитянский В.В., Сердюк Л.М. Станочные приспособления. Конструкторско-технологическое обеспечение эксплуатационных свойств. М.: Машиностроение, 1989. 208 с.
2. Остроменский П.И. Вибрационные испытания радиоаппаратуры и приборов. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1992. 173 с.
3. Левина З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. М.: Машиностроение, 1971. 264 с.
4. Рыжов Э.В., Колесников Ю.В., Суслов А.Г. Контактное взаимодействие твердых тел при статических и динамических нагрузках. Киев: Наукова думка, 1982. 172 с.
5. Серридз М., Лихт Т.Р. Пьезоэлектрические акселерометры и преусилители: Справ. по теории и эксплуатации. Нэрум: Брюль и Кьер, 1987. 187 с.
6. Остроменский П.И. Исследования динамики составных конструкций // Вопросы виброзащиты и вибротехники / Новосиб. электротехн. ин-т. Новосибирск, 1986. С. 23–29.
7. Волошин А.В., Остроменский П.И. Использование модели условного упругого контактного слоя при расчетах собственных частот составных конструкций // Механика технических систем: Тр. научных школ НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. С. 99–108.
8. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: В 2 т. Т. 2. Динамика. М.: Наука, 1983. 640 с.
9. Орлов П.И. Основы конструирования: Справ.-метод. пособие в 2 кн. М.: Машиностроение, 1988. Кн. 2. 544 с.
10. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
11. Иванов А.С., Измайлов В.В. Расчет контактной деформации при конструировании машин // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2006. № 8. С. 3–10.

P.I. Ostromensky, A.V. Voloshin. A Procedure for Calculating the Natural Frequencies of Compound Bodies with Flat Joint. A method for calculating, at the design stage, the natural frequencies of flat-joint compound bodies based on the representation of the flat joint as a conventionally elastic contact layer obeying the Hooke law is proposed. The lateral and angular rigidities of the layer are expressed in terms of the longitudinal rigidity to be calculated by the formulas by N.B. Demkin or A.C. Ivanov for the elastic approach of bodies in the joint. The method was validated by comparing the experimental values of the natural frequencies of compound bodies with the frequencies calculated by two calculation methods for elastic approaches in a flat joint.

Keywords: *compound body, flat joint, elastic contact layer, contact rigidity of layer, natural frequencies of compound bodies.*

Остроменский Петр Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры «Высшая математика» СГУПС. Область научных интересов: математическое моделирование электромеханических систем воспроизведения и измерения вибрации. E-mail: piostr@mail.ru

Волошин Александр Васильевич – ведущий конструктор Научно-исследовательского института электронных приборов, аспирант СГУПС. Область научных интересов: динамика систем виброиспытаний аппаратуры и приборов. E-mail: volosh7@yandex.ru