

Экспериментальное определение поперечных перемещений рельсов

В статье рассмотрен метод измерения поперечных перемещений сечений рельса при прохождении поезда. Дана оценка погрешности метода.

Ключевые слова: перемещения рельсов, измерение деформаций.

В настоящее время весьма актуальна проблема измерения перемещений рельса под поездом. Зная перемещения, полученные экспериментально, можно оценить корректность расчетных моделей железнодорожного пути. По известным перемещениям можно вычислить усилия, передающиеся от колеса на рельс [1], что особенно важно при разработке новых конструкций пути и подвижного состава для повышенных скоростей движения. Кроме того, в 2006–2008 гг. в СГУПСе при исследовании износа рельсов измерялись горизонтальные перемещения рельсов [2]. В настоящей работе предлагается метод измерения поперечных перемещений рельса и дается оценка погрешностей метода.

Прямое измерение перемещений рельса затруднительно. Основная причина этого – отсутствие на железнодорожном пути неподвижных точек, относительно которых следует проводить измерения. Это не дает возможности применить метод, описанный в [3].

Для косвенных измерений в качестве расчетной схемы рельса примем бесконечную балку на сплошном упругом основании.

Запишем известное уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{d^2v}{dx^2}, \quad (1)$$

где M – изгибающий момент; E – модуль упругости материала балки; J – момент инерции поперечного сечения стержня; v – перемещение сечения.

Запишем (1) в конечных разностях:

$$v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1} = \frac{\Delta x^2 M_i}{EJ}. \quad (2)$$

Измеряя изгибающие моменты в n сечениях с расстоянием между ними Δx , можно записать систему уравнений типа (2), в которой n уравнений и $(n + 2)$ неизвестных. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, запишем граничные условия. Для этого необходимо знать перемещения двух точек. Возьмем в качестве этих точек такие, в которых перемещения на два-три порядка меньше, чем наибольший прогиб рельса под нагрузкой. Такими малыми перемещениями можно пренебречь и считать их равными нулю. Тогда граничные условия можно представить в виде:

$$v_0 = 0; \quad v_{n+1} = 0.$$

Расстояние до граничных точек оценим, используя фундаментальное решение задачи об изгибе бесконечной балки на упругом основании, нагруженной силой P в начале координат:

$$v(x) = \frac{P}{8\beta^3 EJ} e^{-\beta x} (\cos(\beta x) + \sin(\beta x)), \quad (3)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{U}{4EJ}},$$

где U – модуль упругости основания железнодорожного пути; P – сила, приложенная к рельсу.

Если $\beta x = 5$, то $e^{-\beta x} = 0,00674$. При этом перемещение граничной точки составит 0,67 % от перемещения точки приложения силы. Поскольку для железнодорожного пути $0,5 < \beta < 1$, то изгибающие моменты имеет смысл измерять не дальше 5 м от колеса.

Если пренебрегать влиянием соседних тележек подвижного состава, то необходимо измерять изгибающие моменты на участке длиной около 12 м (база тележки грузового вагона 1,85 м, плюс в каждую сторону по 5 м).

Как и при решении любого дифференциального уравнения методом конечных разностей, при уменьшении шага Δx увеличивается точность решения. Если принять $\Delta x = 0,1$ м (о необходимом шаге – ниже), то потребуется измерить изгибающие моменты в 121 точке рельса, а потом решить систему уравнений типа (2) 121-го порядка. При использовании ЭВМ решение такой системы уравнений не представляет трудностей, но провести необходимое количество измерений весьма затруднительно.

Если предположить, что путь однородный, т.е. жесткости рельса и основания постоянны по длине, то (3) описывает не только деформированный вид, но и линию влияния перемещений. Это дает возможность провести измерения в одном сечении с малым интервалом времени Δt , т.е. записать осциллограмму изгибающих моментов. Тогда $\Delta x = V\Delta t$ (V – скорость поезда), и (2) можно переписать в матричной форме:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{\Delta t^2 V^2}{EJ} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \dots \\ M_n \end{bmatrix}. \quad (4)$$

При решении систем уравнений большого порядка существенен вопрос об устойчивости вычислений. Как известно [4], устойчивость системы уравнений определяется матрицей коэффициентов. Однако в данном случае матрица коэффициентов системы (4) известна точно, поэтому источником погрешности перемещений может быть только погрешность правой части. Оценим ее.

Введем малые относительные погрешности измерения интервала времени δt , скорости движения поезда δV и изгибающего момента δM . При этом правая часть также получит погрешность δB :

$$B(1 + \delta B) = \frac{t^2(1 + \delta t)^2 V^2(1 + \delta V)^2}{EJ} M(1 + \delta M).$$

Далее будет показано, что погрешность жесткости рельса не влияет на результат. Учитывая, что при $\delta \ll 1$ имеет место соотношение $(1 + \delta)^2 \approx 1 + 2\delta$, получим

$$B(1 + \delta B) \approx \frac{t^2 V^2}{EJ} M(1 + 2\delta t)(1 + 2\delta V)(1 + \delta M).$$

Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и отбросим бесконечно малые высших порядков:

$$\delta B = 2\delta t + 2\delta V + \delta M. \quad (5)$$

Оценим погрешность измерения скорости поезда. Если измерять время τ прохода поездом заданной базы l , то скорость можно найти из известного соотношения

$$V = \frac{l}{\tau}.$$

Как и ранее, внесем в это соотношение погрешности:

$$V(1 + \delta V) = \frac{l(1 + \delta l)}{\tau(1 + \delta t)}.$$

Знак погрешности времени принят таким, чтобы получить неблагоприятное сочетание погрешностей. После преобразований получим

$$V(1 + \delta V) \approx \frac{l}{\tau}(1 + \delta l)(1 + \delta t) \approx \frac{l}{\tau}(1 + \delta l + \delta t),$$

$$\delta V = \delta l + \delta t.$$

С учетом (5) получим

$$\delta B = 4\delta t + 2\delta l + \delta M. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь погрешности измерения изгибающего момента в сечении.

Наклеим на рельс в одном сечении тензорезисторы в продольном направлении в точках 1, 2, 3 и 4, как показано на рисунке. При нагружении рельса эти тензодатчики зафиксируют деформации в точках 1, 2, 3 и 4:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{M}{EJ} y_1, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \frac{M}{EJ} y_2,$$

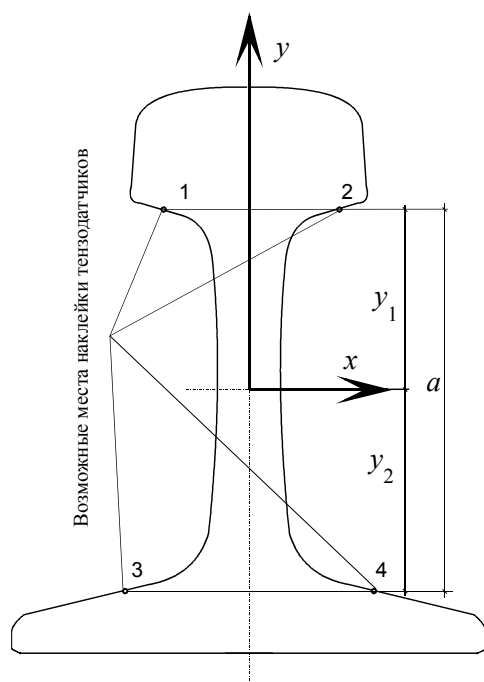
где y_1 и y_2 – расстояния от центра тяжести рельса до точек, в которых измеряются деформации (см. рисунок).

По деформациям нетрудно вычислить изгибающий момент в сечении:

$$M = \frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2a} EJ, \quad (7)$$

$$a = y_1 - y_2.$$

Деформации ε_1 , ε_2 , ε_3 и ε_4 могут иметь некоторую погрешность измерения. Кроме того, погрешность может содержаться в координатах точек измерения. Это вызывает погрешность вычисления изгибающего момента. Введем относительные погрешности измерения деформаций $\delta\varepsilon_1 = \delta\varepsilon_2 = \delta\varepsilon_3 = \delta\varepsilon_4 = \delta\varepsilon$ и наклеивания тензорезисторов δa . Модуль упругости и момент инерции рельса также могут содержать погрешности, но при дальнейшей обработке результатов их произведение EJ окажется в знаменателе и не повлияет на окончательный результат. Подставим погрешности в (7). Получим



Места наклейки тензорезисторов

$$M(1 + \delta M) = \frac{\varepsilon_3(1 + \delta\varepsilon) + \varepsilon_4(1 + \delta\varepsilon) - \varepsilon_1(1 + \delta\varepsilon) - \varepsilon_2(1 + \delta\varepsilon)}{2a(1 - \delta a)} EJ.$$

После преобразований получим

$$M(1 + \delta M) \approx \frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2a} (1 + \delta\varepsilon)(1 + \delta a) EJ.$$

Раскроем скобки и отбросим малые высших порядков. С учетом (7) получим относительную погрешность δM :

$$\delta M = \frac{\Delta M}{M} = \delta\varepsilon + \delta a. \quad (8)$$

Приведем некоторые числовые оценки.

Для рельса Р65 разность координат $a = 120 \dots 130$ мм, абсолютная погрешность $\Delta a = 0,5 \dots 1$ мм. Деформации могут достигать величин $\varepsilon = \pm 5 \cdot 10^{-4}$, а их погрешность по данным [5, 6] – $\delta\varepsilon = 1\%$. Тогда

$$\delta a = \frac{\Delta a}{a} \cdot 100\% = \frac{1}{120} \cdot 100\% = 0,83\%, \quad \delta M = 1,83\%.$$

Современная электроника позволяет без каких-либо трудностей получить $\delta t = 0,02\%$, длина измерительной базы скорости движения поезда может быть получена с погрешностью $\delta l = 0,5\%$.

Для погрешности правой части уравнения (4) получим

$$\delta B = 4 \cdot 0,02\% + 0,5\% \cdot 2 + 1,83\% = 2,91\% \approx 2,9\%.$$

Погрешность перемещений рельса, связанная с погрешностями измерений, составит ту же величину.

Оценим теперь погрешности, связанные с заменой дифференциального уравнения (1) системой уравнений (4). Для этого выполним расчет с разным шагом Δx . При расчетах принято: силы $P_1 = 20$ кН, $P_2 = 25$ кН, модуль упругости рельса $E = 2 \cdot 10^8$ кПа, момент инерции рельса $J = 3\,650$ м⁴, коэффициент постели основания $U = 25$ МПа. Длина участка 12 м. Решение системы можно получить, умножив матрицу, обратную к **A** (4), на столбец правой части **B**. Элементы обратной матрицы можно записать в виде [4]:

$$A_{i,j}^{-1} = \frac{i(n+1-j)}{n+1} \text{ при } i \leq j \quad \text{и} \quad A_{i,j}^{-1} = \frac{j(n+1-i)}{n+1} \text{ при } i \geq j. \quad (9)$$

Результаты пробных расчетов приведены в таблице. Из таблицы видно, что при шаге конечно-разностной сетки $\Delta x = 0,05$ м (количество уравнений – 241) погрешность вычислений не превышает 1,5 %, что в сумме с погрешностью определения правой части (4) составит менее 5 %. Имея оценку необходимого шага Δx при известной скорости, можно получить шаг времени Δt и для разных скоростей движения применять разные величины Δt .

Погрешности вычисления перемещений

Δx , м	Количество уравнений	Точное значение перемещения, мм	Перемещение, найденное из конечных разностей, мм	Погрешность, %
0,2	61	0,426	0,482	13,1
0,1	121		0,442	3,76
0,05	241		0,432	1,41
0,02	601		0,429	0,70

При решении системы (4) нет необходимости вычислять все неизвестные перемещения. Гораздо эффективнее другой путь. При измерениях изгибающих моментов следует начать запись данных заранее, за 5 м до поезда. Полученную запись обработаем таким образом:

– фрагмент записи длиной, равной количеству уравнений, умножим на среднюю строку матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ по правилам умножения матриц. При этом получим перемещение сечения;

– сдвинем запись моментов на один шаг по времени и снова умножим на среднюю строку матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. Получим перемещение сечения в следующий момент времени.

Повторяя процедуру, получим запись перемещений. Этот процесс в обработке сигналов называется цифровой фильтрацией сигнала. Весовыми коэффициентами фильтра являются элементы матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. При этом от матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ требуется только средняя строка. Обозначим эту строку $\mathbf{C}$. Элементы этой строки находятся при подстановке $i = \frac{n+1}{2}$, где n – нечетное число (при четном n матрица не имеет средней строки). Тогда (9) примут вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_j &= \mathbf{A}_{\frac{n}{2}+1,j}^{-1} = \frac{(n+1-j)}{2} \text{ при } \frac{n+1}{2} \leq j, \\ \mathbf{C}_j &= \mathbf{A}_{\frac{n}{2}+1,j}^{-1} = \frac{j}{2} \text{ при } \frac{n+1}{2} \geq j. \end{aligned} \quad (10)$$

Окончательно перемещение сечения можно получить в виде:

$$v = \sum_j \mathbf{C}_j \mathbf{B}_j.$$

Описанная методика дает возможность определять перемещения рельсов с погрешностью около 4 %, что следует признать удовлетворительным.

Библиографический список

1. Суровин П.Г. Экспериментальный метод определения сил взаимодействия колеса и рельса // Вестник СГУПС. Новосибирск: Изд-во СГУПС, 2006. Вып. 14. С. 89–92.
2. Взаимодействие колес и рельсов в кривых участках / Н.И. Карпушенко, И.А. Котова, Ю.Н. Ликратов, П.Г. Суровин, Е.С. Антерейкин // Путь и путевое хозяйство. 2008. № 6. С. 2–5.
3. Суровин П.Г. Экспериментальный метод определения перемещений рельса // Вестник ВНИИЖТ. 2011. № 6. С. 31–34.
4. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л., 1963. 734 с.
5. Экспериментальная механика: В 2 кн. / Пер. с англ.; Под ред. А. Кобаяси. М.: Мир, 1990. Кн. 1. 616 с.
6. Пригоровский Н.И. Методы и средства определения полей деформаций и напряжений: Справ. М.: Машиностроение, 1983. 248 с.

P.G. Surovin. Experimental Determination of the Transverse Displacement of Rails. A procedure for measuring the transverse displacement of rails under a moving train is considered. Assessment of the measurement inaccuracy is given.

Keywords: *transverse displacement of rails, strain measurement.*

Суровин Павел Геннадьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительная механика» СГУПС. Область научных интересов: трещины в рельсах. E-mail: surovina@stu.ru