

МЕХАНИКА, МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

УДК 624.073

П.Г. Суровин, А.О. Кузнецов

Осесимметричный изгиб пластинки, нагруженной поперечной нагрузкой и мембранными усилиями

Статья посвящена проблеме определения значений давления на плоскость лба забоя выработки при строительстве подземных сооружений. В практике строительства подземных сооружений с целью контроля проектных решений используют геотехнический мониторинг, в геодезический раздел которого входят также методы измерения значений контролируемых параметров. Как правило, это контроль различных перемещений, перпендикулярных к продольной оси тоннеля. Однако во время строительства объекта напряженно-деформированное состояние грунтового массива изменяется как в области экскавации выработки, так и впереди нее. Поэтому необходимо измерять продольные перемещения точек лба забоя тоннеля с целью определения давления на временное крепление. После сопоставления результатов рассчитанного давления с давлением, которое определяют по проекту, можно прогнозировать критические ситуации, связанные с безопасностью строительства. Расчетная схема крепления лба забоя представлена в виде пластинки, продольное давление на лоб забоя – поперечной нагрузкой на пластинку, а поперечное давление к оси тоннеля – мембранными усилиями. За основу принято решение задачи методами теории упругости. Дана оценка влияния мембранных усилий на прогиб пластины и погрешность вычисления поперечной нагрузки по измеренным перемещениям.

Ключевые слова: осесимметричная пластинка, мембранные напряжения, функции Бесселя, забой тоннеля.

В нормативной литературе [1, 2] и в иностранных публикациях [3, 4] изложены основные практические и теоретические предпосылки к формулированию задачи исследования: определение значения давления на крепление лба забоя выработки (например, слоем набрызг-бетона) со стороны грунтового массива на месте строительства транспортного тоннеля.

На крепление лба забоя грунтовой массив передает как продольные к оси тоннеля усилия, так и поперечные к ней. Расчетная схема крепления лба забоя представлена в виде пластинки, следовательно, продольное давление на лоб забоя – это поперечная нагрузка на пластинку, а поперечное давление к оси тоннеля – мембранные усилия. При таком предположении возникает вопрос: следует ли при обработке результатов измерений перемещений учитывать мембранные усилия или ими можно пренебречь? Для ответа на него рассмотрим круглую пластинку радиусом r_0 , шарнирно опертую по краю и нагруженную радиальными равномерно распределенными сжимающими мембранными напряжениями p и поперечной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 1).

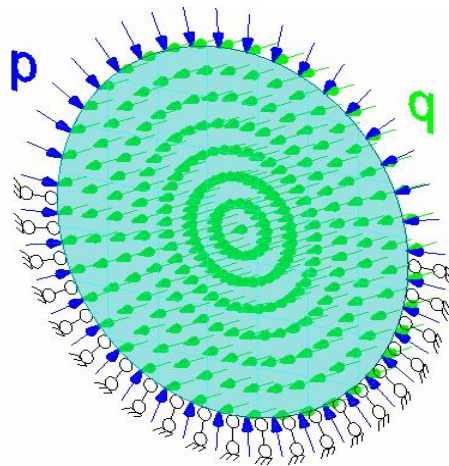


Рис. 1. Расчетная схема пластинки

Для решения поставленной задачи удобно использовать полярную систему координат с полюсом в центре пластины.

При объединении известных решений [5, с. 453–454; 6, с. 191–193; 7, с. 69] уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки можно записать в виде:

$$D\nabla^2(\nabla^2 w) = h\Pi(\sigma, w) + q. \quad (1)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость пластины; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярных координатах; h – толщи-

на пластины; функция $\Pi(\sigma, w) = \sigma_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + 2\tau_{r\varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$; q – поперечная нагрузка на пластину.

Так как мембранные напряжения и поперечная нагрузка постоянны, то задача является осесимметричной, следовательно, напряжения и перемещения не зависят от полярного угла φ , а значит, все производные по φ равны нулю.

Чтобы решить уравнение (1) необходимо сначала найти напряжения σ_r и σ_φ на уровне срединной поверхности (касательные напряжения $\tau_{r\varphi}$ равны нулю в связи с осевой симметрией задачи). С целью определения напряжений запишем систему уравнений, включающую закон Гука, соотношения Коши и уравнения равновесия.

Закон Гука в полярной системе координат может быть записан в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r),\end{aligned}\quad (2)$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; ε_r , ε_φ – относительные радиальная и окружная деформации соответственно.

Связь перемещений и деформаций (уравнения Коши) в осесимметричном случае представлена следующим образом:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad (3)$$

где u – радиальное перемещение.

Уравнение равновесия для осесимметричной задачи примет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \quad (4)$$

Подставив соотношения (2) и (3) в уравнение (4) и выполнив преобразования, получим уравнение для определения радиальных перемещений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (5)$$

Решение этого уравнения представлено следующим выражением:

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (6)$$

где C_1 , C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Граничные условия записаны следующим образом:

$$u(0) = 0, \quad \sigma_r(r_0) = -p.$$

Из первого условия представленных выше выражений следует, что $C_2 = 0$. С целью определения константы C_1 подставим решение (6) в уравнения Коши (3) и закон Гука (2):

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = C_1, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = C_1, \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (C_1 + \nu C_1) = -p.\end{aligned}$$

Из последнего выражения определяем константу:

$$C_1 = -\frac{p(1-\nu)}{E}.$$

Тогда

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = -p.$$

Окончательно уравнение (1) записано в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) \right) = -\alpha^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{q}{D}, \quad (7)$$

где $\alpha^2 = \frac{hp}{D}$.

Умножим уравнение (7) на r и проинтегрируем его, а потом поделим результат на r . В результате преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) = -\alpha^2 \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{qr}{2D} + \frac{A_0}{r}, \quad (8)$$

где A_0 – постоянная интегрирования.

Так как при $r \rightarrow 0$ прогиб пластины w должен оставаться конечной величиной, то $A_0 = 0$.

С целью решения уравнения (8) введем вспомогательное неизвестное $\theta = \frac{\partial w}{\partial r}$ – угол поворота нормали к срединной поверхности. Тогда соотношение (8) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\theta) \right) = -\alpha^2 \theta + \frac{qr}{2D}.$$

Раскрывая скобки, получим выражение

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \theta + \alpha^2 \theta = \frac{qr}{2D}. \quad (9)$$

Введем замену переменных $z = \alpha r$. Учитывая, что $\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{dz}{dr} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial z}$, запишем уравнение (9) в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \theta = \frac{qz}{2D\alpha^3}. \quad (10)$$

Выражение (10) – это линейное неоднородное уравнение. Его общее решение – сумма общего решения однородного (с нулевой правой частью) уравнения и частного решения неоднородного уравнения. При нулевой правой части выражения (10) получаем уравнение Бесселя, решение которого известно [8, 9]:

$$\theta_1 = A_1 J_1(z) + A_2 Y_1(z), \quad (11)$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования; $J_1(z), Y_1(z)$ – функции Бесселя первого порядка.

Функции Бесселя невозможно записать в виде элементарных функций, они представлены бесконечными степенными рядами.

Частное решение уравнения (10) будем искать также в виде степенного ряда:

$$\theta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (12)$$

Так как ряд (12) можно дифференцировать, найдем первую и вторую производные частного решения:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \quad \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}.$$

Далее подставим эти выражения в уравнение (10):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n-2} = \frac{qz}{2D\alpha^3}. \quad (13)$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях z в левой и правой частях соотношения (13), получим рекуррентную формулу при $n > 3$:

$$a_n [n(n-1) + n - 1] + a_{n-2} = 0,$$

из которой следует

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2 - 1}. \quad (14)$$

С целью получения значений коэффициентов a_0, a_1, a_2 и a_3 запишем соотношение (13) подробнее:

$$(2a_2 + 6a_3 z + \dots) + \frac{1}{z} (a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots) + (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots) - \frac{1}{z^2} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots) = \frac{qz}{2D\alpha^3}.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, получим

$$-\frac{1}{z^2} a_0 + (a_0 + 2a_2 + 2a_2 - a_2) + z(6a_3 + 3a_3 - a_3 + a_1) + \dots = \frac{qz}{2D\alpha^3}.$$

Так как в приведенном выше выражении отсутствует слагаемое вида $\frac{1}{z} a_1$, то коэффициент a_1 может быть любым. Примем $a_1 = 0$. Приравнявая коэффициенты при равных степенях z в левой и правой частях выражения, получим

$$a_0 = 0, a_2 = 0, a_3 = \frac{q}{16D\alpha^3}.$$

Применяя соотношение (14), определим, что все коэффициенты a_n при четных n равны нулю.

Следует заметить, что множитель $\frac{q}{16D\alpha^3}$

будет содержаться в каждом слагаемом ряда (12). Это позволяет вынести общий множитель за знак суммы и записать частное решение неоднородного уравнения (10) в виде:

$$\theta_2 = \frac{q}{16D\alpha^3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

В этом выражении $a_3 = 1$, а остальные коэффициенты определяются соотношением (14).

Следует заметить, что соотношение (14) совпадает с аналогичным для функции Бесселя J_1 [10]. Отличие лишь в коэффициентах a_1 и a_3 . Это означает, что общее решение преобразовано к равенству

$$\theta_2 = -\frac{q}{D\alpha^3} J_1(z) + \frac{qz}{2D\alpha^3}.$$

С учетом этого выражения общее решение уравнения (10) представлено в виде:

$$\theta = \left(A_1 - \frac{q}{D\alpha^3} \right) J_1(z) + A_2 Y_1(z) + \frac{qz}{2D\alpha^3}.$$

Так как в центре пластины угол поворота нормали $\theta = 0$, а при $z \rightarrow 0$ $Y_1(z) \rightarrow \infty$, следует принять $A_2 = 0$. Обозначим

$$B = A_1 - \frac{q}{D\alpha^3}.$$

Тогда решение получим в виде:

$$\theta = BJ_1(\alpha r) + \frac{qr}{2D\alpha^2}. \quad (15)$$

Для того чтобы определить прогибы пластины, необходимо проинтегрировать выражение (15). В работе Кузьмина [9] приведена формула дифференцирования функций Бесселя:

$$J_{n+1}(x) = -x^n \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)). \quad (16)$$

Применяя выражение (16) при $n=0$, получим

$$J_1(x) = -\frac{d}{dx} J_0(x),$$

отсюда

$$\int J_1(x) dx = -J_0(x).$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка.

С целью определения прогиба пластины проинтегрируем выражение (15) по dr :

$$w = \int \theta dr = -B \frac{1}{\alpha} J_0(\alpha r) + \frac{qr^2}{4D\alpha^2} + A_3, \quad (17)$$

где A_3 – постоянная интегрирования.

С целью определения постоянных интегрирования B и A_3 запишем граничные условия: при $r=r_0$ прогиб $w=0$; изгибающий момент $M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0$.

Учитывая, что $\theta = \frac{\partial w}{\partial r}$, преобразуем последнее условие к виду:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \theta = 0. \quad (18)$$

Применяя соотношение (16) при $n=1$, найдем производную:

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = \frac{J_1(x)}{x} - J_2(x),$$

где $J_2(x)$ – функция Бесселя второго порядка.

Еще одно соотношение позволяет выразить функцию Бесселя второго порядка через функции нулевого и первого порядков [9]:

$$J_2 = \frac{2J_1}{x} - J_0.$$

Преобразуем производную функции Бесселя первого порядка к виду:

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = J_0 - \frac{J_1(x)}{x}. \quad (19)$$

Тогда условие (18) запишется в виде:

$$\alpha B \left[J_0(\alpha r_0) - \frac{J_1(\alpha r_0)}{\alpha r_0} \right] + \frac{q}{2D\alpha^2} + B \frac{\nu J_1(\alpha r_0)}{r_0} + \frac{\nu q}{2D\alpha^2} = 0,$$

откуда

$$B\alpha \left[J_0(\alpha r_0) - \frac{J_1(\alpha r_0)}{\alpha r_0} (1-\nu) \right] + \frac{q}{2D\alpha^2} (1+\nu) = 0.$$

Из представленного выше равенства определим постоянную интегрирования B :

$$B = \frac{q}{2D\alpha^3} \frac{1+\nu}{J_0(\alpha r_0) - \frac{J_1(\alpha r_0)}{\alpha r_0} (1-\nu)}. \quad (20)$$

С целью определения постоянной интегрирования A_3 рассмотрим условие равенства нулю прогиба пластины на контуре:

$$w(r_0) = -B \frac{1}{\alpha} J_0(\alpha r_0) + \frac{qr^2}{4D\alpha^2} + A_3 = 0,$$

откуда

$$A_3 = B \frac{1}{\alpha} J_0(\alpha r_0) - \frac{qr_0^2}{4D\alpha^2}. \quad (21)$$

Прогиб в центре пластины (при $r=0$) выражен в виде соотношения

$$w(0) = -\frac{B}{\alpha} + A_3. \quad (22)$$

На рис. 2 представлен график, отражающий зависимость прогиба в центре пластины $w(0)$ от радиальных напряжений p . При использовании графика в практических целях следует учесть, что поперечная нагрузка q постоянна и коэффициент Пуассона принят $\nu=0,2$.

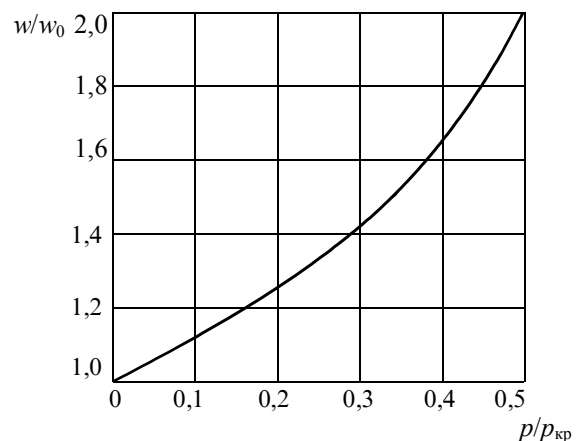


Рис. 2. Зависимость прогиба в центре пластинки от мембранных напряжений: w_0 – прогиб пластины при действии только поперечной нагрузки; $p_{кр}$ – критическое значение радиальных напряжений

При математической обработке результатов измерений исходят из того, что погрешность вычислений должна быть $\sim 0,1$ от погрешности измерений. По произведенному расчету автор делает вывод, что, например,

при погрешности измерений 5 % погрешность вычислений составит $\sim 0,5$ %. Это означает, что при мембранных усилиях $p \geq 5 \cdot 10^{-3} p_{кр}$ их влияние следует учитывать.

Библиографический список

1. СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01–83*. М.: Минрегион России, 2011. 178 с.
2. СП 122.13330.2012. Тоннели железнодорожные и автодорожные. Актуализированная редакция СНиП 32-04–97. М.: Минрегион России, 2012. 126 с.
3. Kovari K. Erroneous concepts behind the New Austrian Tunnelling Method // Tunnels & Tunnelling. 1994. November. P. 1–19.
4. Lunardi P. Design and Construction of Tunnels. Leipzig: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 575 p.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
6. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1956. 419 с.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
8. Корнеев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.
9. Кузьмин Р.О. Бесселевы функции. М.: Гос. технико-теорет. изд-во, 1933. 152 с.
10. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1969. 288 с.

P.G. Surovin, A.O. Kuznetsov

Axisymmetric Bend of the Plate Loaded by the Transverse Force and Membrane Forces

Abstract. The paper is devoted to the problem of determination of the pressure on the surface of the bottomhole forehead in the process of the underground facilities construction. To control the project considerations, the construction of underground facilities involves geotechnical monitoring, which includes the methods to measure the values of the monitored parameters. It is mainly the monitoring of various perpendiculars displacements to the longitudinal axis of the tunnel. However, during the facility construction the stress and strain state of the soil mass changes both in the zone of excavation, and in front of it. Thus, it is necessary to measure the longitudinal displacement of the points of the bottomhole forehead of the tunnel to determine the pressure on the false timbering. The comparison of the results of the calculated pressure and the pressure determined by the project allows to make a forecast of critical situations related to the safety of construction. The design model of the bottomhole forehead fixation is proposed as a plate, the longitudinal pressure on the bottomhole forehead as the transverse load on the plate, and the lateral thrust to the axis of the tunnel as the membrane forces. The decision is based on the theory of elasticity. The estimation of the membrane forces influence on the plate deflection and the deviation in the lateral load calculations concerned with the measured displacements are suggested.

Key words: *axisymmetric plate; membrane forces; Bessel functions; tunnel face.*

Суровин Павел Геннадьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительная механика» СГУПСа. E-mail: surovin@stu.ru

Кузнецов Анатолий Олегович – аспирант кафедры «Тоннели и метрополитены», младший научный сотрудник НИЛ ТМ СГУПСа. E-mail: kuzemon91@mail.ru