

МЕХАНИКА, МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

УДК 534.014.3

И.П. Попов

Комплексная мощность механических колебательных процессов

В статье рассматриваются различные виды механической мощности, а именно: инерционная, деформационная, гравитационная, диссипативная и полная. Представленная дифференциация обусловлена существованием соответствующих видов механической энергии и основана на том, что мощность является производной работы, совершаемой для изменения той или иной энергии. Тема работы определяется тем обстоятельством, что для указанных видов мощности характерно комплексное представление, при котором полная мощность содержит ортогональные компоненты. Целью исследования является установление названных видов мощности для механических систем при гармонических колебаниях. Задача исследования заключается в анализе мгновенного значения мощности и представлении ее в виде суммы искоемых составляющих. Актуальность темы обусловлена тем, что при электрическом питании привода, принуждающего инертное тело совершать колебания, инерционная мощность трансформируется в реактивную мощность сети, что, во-первых, ухудшает ее параметры, а во-вторых, сопровождается тепловыми потерями порядка 10 % реактивной (инерционной) мощности за счет ее циркуляции в сети. Поэтому для решения вопросов повышения энергоэффективности важно корректно учитывать все составляющие полной механической мощности. Методология проведения работы определяется тем, что механические и электрические явления, как правило, математически изоморфны, что является основой для электрического моделирования механических процессов и систем. В работе показано, что инерционная, деформационная и диссипативная мощности представляют собой аналоги индуктивной, емкостной и активной электрических мощностей соответственно. Кратко рассмотренная гравитационная мощность является аналогом индуктивной мощности. В этой связи представляется закономерным, что квадрат полной механической мощности равен сумме квадратов инерционной (или деформационной, или гравитационной) и диссипативной мощностей, подобно соотношениям для соответствующих электрических мощностей.

Ключевые слова: гармонические колебания; инерционная, деформационная, диссипативная и полная мощности.

При сообщении инертному телу линейных гармонических колебаний привод развивает два вида энергии – кинетическую [1–3] и диссипативную [4]. Производной по времени от второй является знакопостоянная диссипативная мощность. Другие виды мощности при колебаниях, в том числе производная от кинетической энергии, в механике не рассматриваются.

В электротехнике, процессы которой зачастую изоморфны в математическом смысле, механическим [5–10] аналогом диссипативной мощности является активная мощность. При этом в электротехнике учитывается реактивная мощность, являющаяся аналогом производной от кинетической энергии, и полная мощность, объединяющая активную и реактивную.

Цель исследования заключается в определении инерционной мощности (производной от работы, необходимой для изменения кинетической энергии), полной и других видов мощности, развиваемых

при осуществлении механических периодических процессов.

Задача исследования состоит в построении математической модели механических колебательных процессов, позволяющей получить аналитические выражения компонентов мощности.

Актуальность темы определяется значительным влиянием механических технологических операций на энергетические процессы, происходящие в питающей сети. Инерционная и деформационная мощности преобразуются в электрическую реактивную мощность, частота механических колебаний порождает соответствующие гармоники в сети. Эти факторы приводят к дополнительным тепловым электрическим потерям – до 1/10 от реактивной мощности. Таким образом, для оптимизации энергозатрат наряду с учетом диссипативной мощности следует принимать во внимание другие виды мощности.

Инерционная, диссипативная и полная мощности при гармонических колебаниях. Пусть координата инертного тела массой m изменяется по закону

$$x = l \sin \omega t,$$

где l – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота; t – время.

Мгновенная скорость тела имеет вид
 $v = \dot{x} = l\omega \cos \omega t$.

Амплитуда скорости равна:

$$V_m = l\omega.$$

Ее действующее значение по аналогии с электрическими величинами [11] определяется как

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Мгновенное значение инерционной силы равно:

$$f_a = m \ddot{x} = -lm\omega^2 \sin \omega t. \quad (2)$$

Пусть сила сопротивления движению имеет вид

$$f_\mu = \mu \dot{x} = \mu l\omega \cos \omega t, \quad (3)$$

где μ – коэффициент сопротивления.

Суммарная сила равна:

$$\begin{aligned} f &= f_a + f_\mu = -lm\omega^2 \sin \omega t + \mu l\omega \cos \omega t = \\ &= l\omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} \cos \omega t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

Для придания выражению компактности может быть введено обозначение

$$\phi = \arctg \frac{m\omega}{\mu}. \quad (4)$$

Тогда выражение для суммарной силы примет вид

$$\begin{aligned} f &= l\omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} (\cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t) = \\ &= l\omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}$$

Амплитуда силы равна:

$$F_m = l\omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}.$$

Ее действующее значение по аналогии с электрическими величинами определяется как

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l\omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Мгновенное значение мощности равно:

$$\begin{aligned} s &= f v = l\omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} \cos(\omega t + \phi) l\omega \cos \omega t = \\ &= 0,5 l^2 \omega^2 \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2} [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] = \\ &= FV [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] = \\ &= FV (\cos \phi + \cos 2\omega t \cos \phi - \sin 2\omega t \sin \phi) = \\ &= FV \cos \phi (1 + \cos 2\omega t) - \\ &\quad - FV \sin \phi \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (6)$$

По аналогии с электрической активной мощностью под диссипативной мощностью следует понимать величину

$$P = FV \cos \phi. \quad (7)$$

Замечание 1. ϕ – это не пространственный сдвиг. Это сдвиг между фазами колебаний силы и скорости.

По аналогии с электрической реактивной мощностью под инерционной мощностью следует понимать величину

$$Q_i = FV \sin \phi. \quad (8)$$

Замечание 2. Так же как и в электротехнике, P – это среднее значение, например, за период, а Q – это амплитуда.

По аналогии с электрической полной мощностью под полной механической мощностью следует понимать величину, равную произведению действующих значений силы и скорости:

$$S = FV = \sqrt{Q_i^2 + P^2}. \quad (9)$$

В соответствии с (1), (5) и (8)

$$\begin{aligned} Q_i &= FV \sin \phi = \\ &= \frac{l\omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l\omega}{\sqrt{2}} \frac{m\omega}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} = \\ &= \frac{ml^2 \omega^3}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f_a v &= -lm\omega^2 \sin \omega t l\omega \cos \omega t = \\ &= -0,5 l^2 m \omega^3 \sin 2\omega t = \\ &= F_a V \sin 2\omega t = -Q_i \sin 2\omega t, \end{aligned} \quad (11)$$

что соответствует (6) и является подтверждением (10).

В соответствии с (1), (5) и (7)

$$\begin{aligned} P &= FV \cos \phi = \\ &= \frac{l\omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l\omega}{\sqrt{2}} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu l^2 \omega^2}{2}. \quad (12)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f_{\mu} v &= \mu l \omega \cos \omega t l \omega \cos \omega t = \\ &= 0,5 \mu l^2 \omega^2 (1 + \cos 2\omega t) = \\ &= F_{\mu} V (1 + \cos 2\omega t) = P (1 + \cos 2\omega t), \end{aligned} \quad (13)$$

что соответствует (6) и является подтверждением (12).

Из (9), (10) и (12) следует

$$\begin{aligned} S &= FV = \frac{l \omega \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l \omega}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{l^2 \omega^2 \sqrt{\mu^2 + m^2 \omega^2}}{2}. \end{aligned}$$

Деформационная, диссипативная и полная мощности при гармонических колебаниях. Здесь рассматривается упругая деформация тела при гармоническом силовом воздействии [12–15]. Масса тела не учитывается.

Мгновенное значение упругой силы равно:

$$f_k = kx = kl \sin \omega t, \quad (14)$$

где k – коэффициент упругости.

Суммарная сила с учетом (3) имеет вид

$$\begin{aligned} f &= f_k + f_{\mu} = kl \sin \omega t + \mu l \omega \cos \omega t = \\ &= l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} \sin \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu \omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

По аналогии с (4) вводится обозначение

$$\phi = \arctg \frac{k}{\mu \omega}.$$

Выражение для суммарной силы примет вид

$$\begin{aligned} f &= l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} (\sin \phi \sin \omega t + \cos \phi \cos \omega t) = \\ &= l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cos (\omega t - \phi). \end{aligned}$$

Амплитуда силы равна:

$$F_m = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}.$$

Ее действующее значение определяется как

$$F = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Мгновенное значение мощности равно:

$$\begin{aligned} s &= f v = l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} \cos (\omega t - \phi) l \omega \cos \omega t = \\ &= 0,5 l^2 \omega \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2} [\cos \phi + \cos (2\omega t - \phi)] = \\ &= FV [\cos \phi + \cos (2\omega t - \phi)] = \\ &= FV (\cos \phi + \cos 2\omega t \cos \phi + \sin 2\omega t \sin \phi) = \\ &= FV \cos \phi (1 + \cos 2\omega t) + FV \sin \phi \sin 2\omega t = \\ &= p + q_d. \end{aligned} \quad (16)$$

Диссипативная мощность такая же, как в (6), (7) и (12). Действительно,

$$\begin{aligned} P &= FV \cos \phi = \\ &= \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l \omega}{\sqrt{2}} \frac{\mu \omega}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} = \frac{\mu l^2 \omega^2}{2}. \end{aligned}$$

Под деформационной мощностью (имея в виду (15), (1), (8) и (16)) следует понимать величину

$$\begin{aligned} Q_d &= FV \sin \phi = \\ &= \frac{l \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{\sqrt{2}} \frac{l \omega}{\sqrt{2}} \frac{k}{\sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}} = \frac{kl^2 \omega}{2}. \end{aligned} \quad (17)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f_k v &= kl \sin \omega t l \omega \cos \omega t = \\ &= 0,5 kl^2 \omega \sin 2\omega t = \\ &= F_k V \sin 2\omega t = Q_d \sin 2\omega t, \end{aligned} \quad (18)$$

что соответствует (16) и является подтверждением (17).

Полная мощность равна произведению действующих значений силы и скорости

$$S = FV = \sqrt{Q_d^2 + P^2} = \frac{l^2 \omega \sqrt{k^2 + \mu^2 \omega^2}}{2}.$$

Гравитационная мощность. Момент силы математического маятника равен:

$$m_j = mgL\alpha,$$

где L – длина маятника, α – угол отклонения, который при его малых значениях изменяется по гармоническому закону

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega t.$$

Угловая скорость равна:

$$\dot{\alpha} = \alpha_0 \omega \cos \omega t = \alpha_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \cos \omega t.$$

Мгновенное значение гравитационной мощности равно:

$$q_g = m_j \dot{\alpha} = mgL\alpha_0 \sin \omega t \alpha_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \cos \omega t = \\ = 0,5m\alpha_0^2 \sqrt{Lg^3} \sin 2\omega t.$$

Под гравитационной мощностью следует понимать величину

$$Q_g = 0,5m\alpha_0^2 \sqrt{Lg^3}.$$

Комплексное представление. В электротехнике принято гармонические величины представлять как проекции на оси вращающихся в комплексной плоскости векторов. При этом для единообразия векторы в комплексной плоскости изображают для момента времени $t = 0$. Применительно к случаю с инерционной мощностью комплексное представление имеет вид

$$\dot{V}_m = V_m e^{j\pi/2}.$$

При этом

$$v = V_m \cos \omega t = \text{Im } \dot{V}_m.$$

Для действующих значений

$$\dot{V} = V e^{j\pi/2}, \quad \dot{F} = F e^{j(\pi/2+\phi)}.$$

По аналогии с электротехникой под полной механической мощностью следует понимать величину, равную произведению комплекса силы и сопряженного комплекса скорости:

$$\underline{S} = \dot{F}^* \dot{V} = F e^{j(\pi/2+\phi)} V e^{-j\pi/2} = F V e^{j(\pi/2+\phi-\pi/2)} = \\ = F V e^{j\phi} = F V \cos \phi + j F V \sin \phi = P + j Q_i.$$

Замечание 3. Комплексная мощность не является изображением синусоиды, поэтому над ее символом точку ставить не следует.

Деформационная мощность противоположна по знаку инерционной:

$$\underline{S} = \dot{F}^* \dot{V} = F e^{j(\pi/2-\phi)} V e^{-j\pi/2} = F V e^{j(\pi/2-\phi-\pi/2)} = \\ = F V e^{-j\phi} = F V \cos \phi - j F V \sin \phi = P + j Q_d.$$

Очевидно, что

$$P = \text{Re } \dot{F} \dot{V}^*, \quad Q = \text{Im } \dot{F} \dot{V}^*.$$

Векторное представление. Подобно комплексному представлению гармонические величины можно отождествить с проекциями вращающихся векторов (в рассматриваемом случае $\mathbf{F}$ и $\mathbf{V}$) на ортогональные оси в фазовой плоскости вращения. При этом

$$P = (\mathbf{F}, \mathbf{V}), \quad Q = [\mathbf{F}, \mathbf{V}], \quad S^2 = (\mathbf{F}, \mathbf{V})^2 + [\mathbf{F}, \mathbf{V}]^2.$$

Замечание 4. Вращающиеся векторы при линейных колебаниях могут быть ассоциированы с кривошипами привода, преобразующего вращательное движение в возвратно-поступательное.

Выводы. В настоящей работе представлено математическое описание механических колебательных процессов под действием внешнего силового гармонического воздействия. Развиваемая при этом механическая мощность помимо диссипативной составляющей содержит другие виды мощности – инерционную, деформационную и гравитационную. Потоки последних трех видов мощности являются обратимыми: источник внешнего воздействия и объект, совершающий колебания, обмениваются между собой любым из этих видов мощности. В этой связи все виды механической мощности являются аналогами электрических видов мощности – активной и реактивной. По этой же причине полная механическая мощность определяется аналогично полной электрической мощности. Указанные виды механической мощности допускают комплексное и векторное представления.

Библиографический список

1. Попов И.П. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. Iss. 4. P. 393–395.
2. Попов И.П. Свободные механические гармонические колебания, обусловленные преобразованием кинетической энергии в кинетическую // Вестн. Курганского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 6. № 3 (30). С. 76–77.
3. Попов И.П. Колебательные системы с однородными элементами // Инженерная физика. 2013. № 3. С. 52–56.
4. Попов И.П., Чумаков В.Г., Терентьев А.Д. Редукция мощности привода решетных сортировальных машин // Науч.-техн. ведомости Санкт-Петербургского гос. политехн. ун-та. 2015. № 2 (219). С. 175–181.

5. Попов И.П. Свободные гармонические колебания в электрических системах с однородными реактивными элементами // Электричество. 2013. № 1. С. 57–59.
6. Попов И.П. Емкостно-инертное устройство // Изв. Санкт-Петербургского гос. электротехн. ун-та «ЛЭТИ». 2015. № 2. С. 43–45.
7. Попов И.П. Зависимость реактивного сопротивления пьезоэлектрического преобразователя от механических параметров его нагрузки // Науч.-техн. вестн. информ. технологий, механики и оптики. 2013. № 5 (87). С. 94–98.
8. Попов И.П. Реактивные элементы электрических цепей с «неэлектрическими» параметрами // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Технические науки. 2010. № 4 (27). С. 166–173.
9. Попов И.П. Функциональная связь между индуктивностью и массой, емкостью и упругостью // Вестн. Забайкальского гос. ун-та. 2013. № 02 (93). С. 109–114.
10. Попов И.П. Реализация частной функциональной зависимости между индуктивностью и массой // Российский научный журнал. 2012. № 6 (31). С. 300–301.
11. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. М.: Высш. шк., 1978. 528 с.
12. Попов И.П. Колебательные системы, состоящие только из инертных или только упругих элементов, и возникновение в них свободных гармонических колебаний // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 95–103.
13. Попов И.П., Шамарин Е.О. Свободные механические гармонические колебания со смещенными фазами // Вестн. Тихоокеанского гос. ун-та. 2013. № 2 (29). С. 39–48.
14. Попов И.П. Механические колебательные системы, состоящие только из однородных элементов, и возникновение в них свободных гармонических колебаний // Омский науч. вестн. Приборы, машины и технологии. 2012. № 3 (113). С. 177–179.
15. Попов И.П. Свободные механические гармонические колебания в системах с кривошипно-кулисными механизмами // Вестн. Курганского гос. ун-та. Технические науки. 2012. Вып. 7. № 2 (24). С. 14–16.

I.P. Popov

Complex Power of Mechanical Oscillatory Processes

Abstract. The paper investigates various types of mechanical power, in particular, inertia, deformation, gravitation, dissipative and full. The proposed differentiation is determined by the existence of relevant types of mechanical energy and is based on the fact that power is derived from the work done to change this or that energy. The subject of the research is stipulated by the fact that the above mentioned types of power are characterized by complex representation, wherein full power is comprised of orthogonal components. The aim of the study is to identify the above mentioned types of power for mechanical systems under harmonic vibrations. The objective of the research is the analysis of the instantaneous power and its representation as the sum of sought components. The relevance of the research is conditioned by the assumption that with electric supply of an actuating device, forcing an inert body to vibrate, inertia power is transformed into the mains reactive power, what, firstly, worsens its parameters, and secondly, is accompanied by about 10% heat loss of reactive (inertial) power due to its circulation in the mains. Therefore, it is essential to take properly into consideration all the components of full mechanical power in the resolution of the issue of energy saving. The methodology of the research is based on the assumption that the mechanical and electrical phenomena are usually mathematically isomorphic, what is the basis for the electric modeling of mechanical processes and systems. The paper shows that inertia, deformation and dissipative power are the analogues for inductive, capacitive and actual electric power respectively. Briefly considered gravitational power is an analogue for inductive power. In this respect, it seems reasonable that squared full mechanical power is equal to the sum of squared inertia (deformation or gravitational) and dissipative power, similar to the correlation for the corresponding electrical powers.

Key words: *harmonic vibration; inertia, deformation, dissipative and full power.*

Попов Игорь Павлович – старший преподаватель кафедры «Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты» Курганского государственного университета. E-mail: ip.popov@yandex.ru