

Практическое применение симплекс-метода для оценки устойчивости однородных и неоднородных откосов и склонов

Приводится методика построения диаграммы устойчивости первого типа для однородных и неоднородных откосов и склонов. Диаграмма строится на основе статического анализа устойчивости, выполняемого симплекс-методом, и позволяет установить области безопасного, предельного и недопустимого состояния грунтового массива в отношении возможности его обрушения. Для однородных откосов и склонов диаграмма устойчивости первого типа строится в координатах параметров прочности грунта – удельного сцепления и угла внутреннего трения. Соответственно, фактическим значениям характеристик прочности грунта отвечает одно из характерных состояний – безопасное, предельное или недопустимое. При этом очертание линии скольжения принимается в виде логарифмической спирали. В случае неоднородных откосов и склонов диаграмма устойчивости первого типа строится в следующих координатах: положение точки выхода линии скольжения на поверхность в верхней части склона и отношение виртуальных значений параметров прочности к их фактическим величинам. Здесь очертание линии скольжения принимается в виде дуги окружности. Диаграмма устойчивости показывает состояние склона на всем его протяжении.

Ключевые слова: *откосы и склоны, устойчивость, линейное программирование, симплекс-метод.*

Для оценки устойчивости склонов произвольного очертания и геологического строения по-прежнему широко используется расчетная схема метода отсеков [1, 2]. Статические решения теории предельного равновесия выполнены для относительно простых расчетных схем однородных откосов и не позволяют оценить устойчивость склона в общем случае [3, 4]. В рамках конечно-элементного анализа упруго-пластического деформирования грунтовых массивов можно рассчитать деформирование склона, однако критерий устойчивости точно не сформулирован [5, 6].

Расчетная схема метода отсеков применяется преимущественно для условий плоской деформации. Здесь предполагается решение двух основных вопросов: очертание опасной линии скольжения и определение системы сил взаимодействия между отсеками.

Решение первого вопроса достигается методами вариационного исчисления или поиском положения опасной линии скольжения заданного очертания, преимущественно отрезком окружности или логарифмической спирали [7, 8]. Опасной, как правило, считается линия скольжения, дающая минимальный запас устойчивости склона.

Решение второго вопроса обеспечивается в рамках линейного программирования, реализуемого симплекс-методом [9]. Такое решение было предложено для фиксированной схемы обрушения и оформлено в виде диаграммы устой-

чивости первого типа [10]. На этой диаграмме в плоскости c, φ (удельное сцепление и угол внутреннего трения грунта по линии скольжения) выделяются три области – безопасного, предельного и недопустимого состояния склона. Для значений c, φ безопасной области принятая линия предполагаемого сдвига не может являться линией скольжения и обрушение в принципе невозможно. Для значений c, φ недопустимой области не обеспечивается статическое равновесие системы сил при данной прочности грунта и обрушение неминуемо. Наконец, при значениях c, φ области предельного состояния принятая схема обрушения может быть реализована.

Для расширения области применения симплекс-метода необходимо объединить статический анализ системы сил взаимодействия между отсеками с поиском опасной линии скольжения. В данной статье предлагается вариант такого решения.

Рассматриваются расчетные схемы откосов и склонов для условий плоской деформации в плоской декартовой системе координат zOx , ось Oz вертикальна и совпадает по направлению с силой тяжести.

Сначала необходимо рассмотреть систему уравнений и неравенств симплекс-метода базового решения для фиксированной схемы обрушения. На рис. 1 показана расчетная схема метода отсеков для произвольного склона.

Часть склона выделяется предполагаемой линией скольжения ADB . Форму линии скольжения пока не оговариваем. К контуру склона ACB может быть приложена произвольная нагрузка. В предполагаемой области обрушения $ACBD$ могут действовать произвольные массовые силы.

Для удобства записи выражений равнодействующие силы, приложенные к боковым граням отсека kn и lm , приведем к подошве отсека, а равнодействующие внешних нагрузок и массовых сил и равнодействующие силы, приложенные к подошве отсека, приведем к крайней правой точке m подошвы отсека. Таким образом, на отдельный отсек действуют следующие силы и моменты сил (рис. 1).

Геометрические параметры отсека: высота левой h_{i-1} и правой h_i вертикальных граней, ширина b_i , длина подошвы l_i и угол ее наклона к горизонтали α_i – обозначены на рис. 1. Показанные на этом рисунке направления сил, а также величин a_i и α_i ($a_i = b_i \operatorname{tg} \alpha_i$) будем считать положительными.

Цель решения заключается в определении наиболее невыгодной в отношении устойчивости склона системы сил взаимодействия отсеков с окружающим грунтом. Поскольку речь идет о

вероятности обрушения, то следует оценить возможность формирования вдоль линии ADB предельных сдвигающих сил, направленных в сторону, противоположную ожидаемому смещению грунтового массива.

Неизвестными из перечисленных выше величин являются для каждого отсека силы и моменты $Z_i, X_i, M_i, N_i, T_i, C_i$.

Далее для отдельного отсека запишем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} -Z_{i-1} + N_i \cos \alpha_i + T_i \sin \alpha_i + Z_i - U_i = 0; \\ X_{i-1} + N_i \sin \alpha_i - T_i \cos \alpha_i - X_i + V_i = 0; \\ -Z_{i-1} b_i + X_{i-1} a_i + M_{i-1} + C_i - M_i - W_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Величины нормальных сил давления по боковым граням отсека и его подошве ограничены неотрицательными значениями:

$$X_i \geq 0; N_i \geq 0. \quad (2)$$

Кроме того, учитывая оценку линии ADB как возможной линии скольжения, ограничим неотрицательными значениями величину касательной силы T_i , действующей по подошве отсека:

$$T_i \geq 0. \quad (3)$$

Соотношение между нормальными и касательными силами, действующими по боковым граням отсека и его подошве, должно удовле-

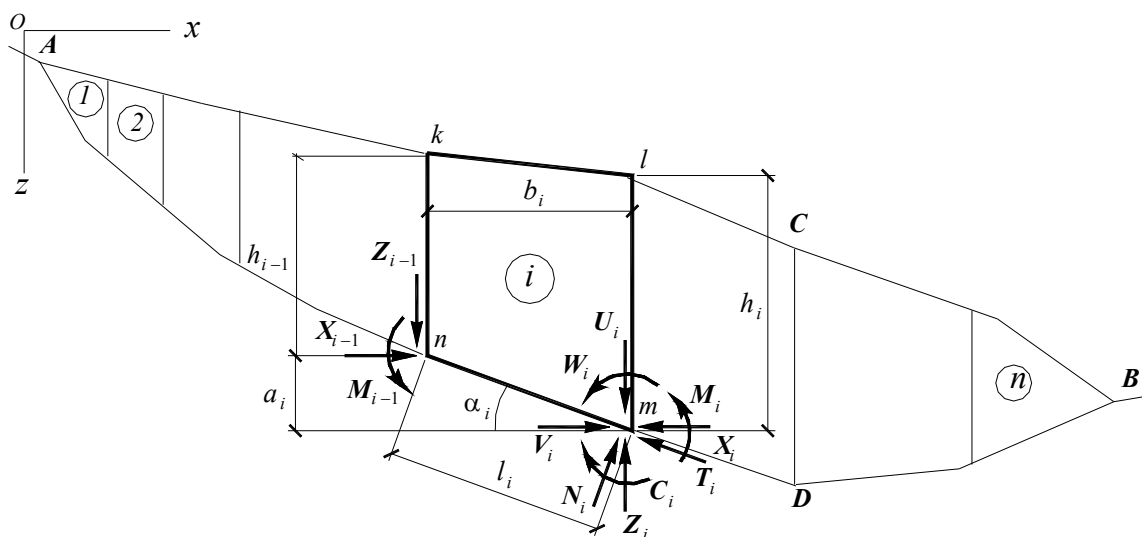


Рис. 1. Расчетная схема метода отсеков:

U_i, V_i, W_i – вертикальная, горизонтальная силы и момент, эквивалентные действию внешних нагрузок и массовых сил на i -й отсек; $Z_{i-1}, X_{i-1}, M_{i-1}$ – вертикальная, горизонтальная силы и момент, эквивалентные силовому воздействию на левую вертикальную грань i -го отсека; Z_i, X_i, M_i – вертикальная, горизонтальная силы и момент, эквивалентные силовому воздействию на правую вертикальную грань i -го отсека; N_i, T_i, C_i – нормальная, касательная к подошве i -го отсека силы и момент, эквивалентные силовому воздействию по подошве i -го отсека

творять закону прочности грунта на сдвиг. Согласно закону Кулона для подошвы отсека запишем

$$N_i \operatorname{tg} \varphi_i + c_i l_i - T_i \geq 0, \quad (4)$$

где φ_i , c_i – параметры прочности грунта, залегающего в уровне подошвы i -го отсека.

Для боковой грани условия прочности запишем с учетом как положительных, так и отрицательных значений вертикальной силы Z_i :

$$\begin{cases} X_i \operatorname{tg} \varphi_i^* + c_i^* h_i - Z_i \geq 0; \\ X_i \operatorname{tg} \varphi_i^* + c_i^* h_i + Z_i \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где φ_i^* , c_i^* – средневзвешенные значения параметров прочности грунтов, которые пересекают боковые грани отсека.

Положение точек приложения равнодействующих сил давления по боковой грани и подошве отсека ограничим величинами соответствующих отрезков kn и nm . Тогда, учитывая принятые направления положительных величин моментов и сил, необходимо ограничить величины моментов неотрицательными значениями:

$$M_i \geq 0; C_i \geq 0. \quad (6)$$

Кроме того, следует выполнить неравенства:

$$N_i l_i - C_i \geq 0; X_i h_i - M_i \geq 0. \quad (7)$$

Приведенные неравенства определяют наиболее широкий диапазон изменения значений искомых величин сил взаимодействия отсека с окружающим грунтом для решения поставленной задачи.

Данные выражения, сведенные вместе для всех отсеков, образуют систему линейных равенств и неравенств относительно сил и моментов, действующих между отсеками и по их подошве. Эта система может быть использована для решения экстремальной задачи поиска максимума или минимума некоторой функции цели, также линейной относительно указанных выше неизвестных величин. В этом случае будет сформулирована задача линейного программирования, для решения которой используется симплекс-метод.

Функцию цели выберем в соответствии с содержанием задачи. Для оценки возможности представления линии ADB как линии скольжения используем функцию цели в виде

$$\Phi = \sum (T_i - N_i \operatorname{tg} \varphi_i - c_i l_i). \quad (8)$$

Из неравенства (4) следует, что данная функция может принимать отрицательные

или нулевые значения. Поиск максимума этой функции соответствует поставленной цели – исследовать возможность обрушения склона по заданной линии ADB . Функция (8) линейна относительно сил взаимодействия отсеков с окружающим грунтом. Поиск ее максимума при выполнении линейных ограничений равенств и неравенств составляет задачу линейного программирования и осуществляется симплекс-методом.

Возможны следующие три варианта результата решения.

Во-первых, данная система может оказаться несовместной. Это означает, что не существует взаимоуравновешенной системы сил взаимодействия отсеков с окружающим грунтом без нарушения условия прочности грунта по линии скольжения. Такое состояние следует квалифицировать как недопустимое, разрушение склона здесь неизбежно. Во-вторых, равенство функции цели (8) нулю свидетельствует о возможности состояния предельного равновесия склона, причем линией скольжения может быть линия ADB . Такому состоянию соответствует значение коэффициента устойчивости, равное единице. В-третьих, максимум функции цели может иметь отрицательное значение. Этот результат соответствует безопасному состоянию склона для принятой схемы обрушения. Линия ADB не может быть линией скольжения, и по этой линии обрушения не произойдет.

Таким образом, в результате решения задачи выделяется одно из трех состояний: безопасное, предельное или недопустимое.

Сначала рассмотрим случай однородного откоса, сложенного грунтом с параметрами прочности c , φ . Следовательно, имеем $c_i = c_i^* = c$ и $\varphi_i = \varphi_i^* = \varphi$. Здесь в качестве линии скольжения примем логарифмическую спираль, очертание которой определяется выражением

$$r = r_0 e^{(\theta - \theta_0) \operatorname{tg} \varphi}.$$

Положение линии скольжения (рис. 2) определяется координатой точки выхода на поверхность x_A в верхней точке A , начальным радиусом r_0 и наклоном этого радиуса к вертикали θ_0 . Далее в координатах c , φ назначается некоторый луч, исходящий из начала координат (рис. 3).

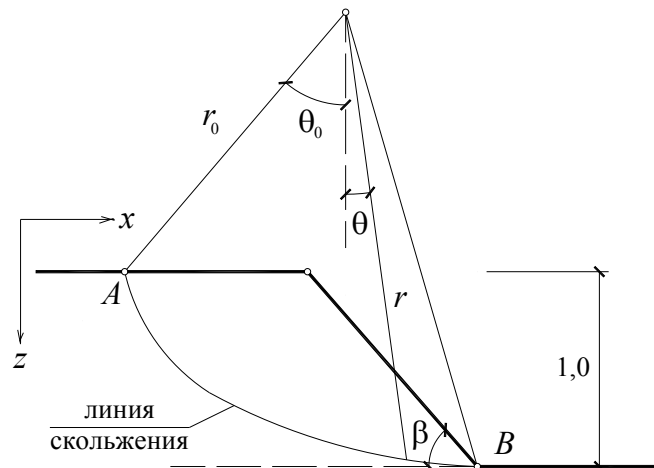


Рис. 2. Положение линии скольжения

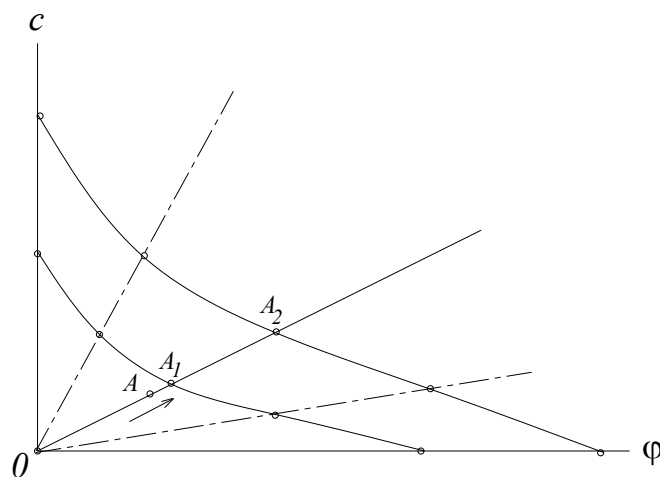


Рис. 3. К построению диаграммы устойчивости

Положению некоторой точки A на этом луче (см. рис. 3) отвечают определенные значения параметров прочности грунта. Для этих значений решается система уравнений и неравенств симплекс-метода. Задача заключается в определении положений точки A , отвечающей переходу из недопустимого в предельное состояние (положение A_1) и из предельного в безопасное состояние (положение A_2). Функцией поиска в данной задаче является соответствующее положение точки A . Как первая граница (A_1), так и вторая (A_2) должны быть наиболее удалены от начала координат. Аргументами поиска являются параметры положения и очертания линии скольжения x_A , θ_0 и r_0 .

Выполняя указанную операцию поиска для нескольких лучей, можно установить очертание границ между областями недопустимого, предельного и безопасного состояний. Положение

этих границ в координатах c , ϕ было названо диаграммой устойчивости 1-го типа. На рис. 4 показан пример диаграммы устойчивости 1-го типа для конкретного случая, а именно для ненагруженного откоса высотой 6 м и крутизной 1 : 1, сложенного грунтом с удельным весом $\gamma = 20 \text{ кН/м}^3$.

Иная ситуация возникает в наиболее общем случае — неоднородных откосов и склонов. Не имея возможности использовать в качестве показателя состояния склона параметры прочности конкретного грунта, в качестве данного показателя принимается коэффициент k , представляющий собой отношение виртуальных значений параметров прочности ϕ_i , c_i к их фактической величине ϕ_{ni} , c_{ni} для грунтов по линии скольжения:

$$k = \frac{\text{tg } \phi_i}{\text{tg } \phi_{ni}} = \frac{c_i}{c_{ni}}. \quad (9)$$

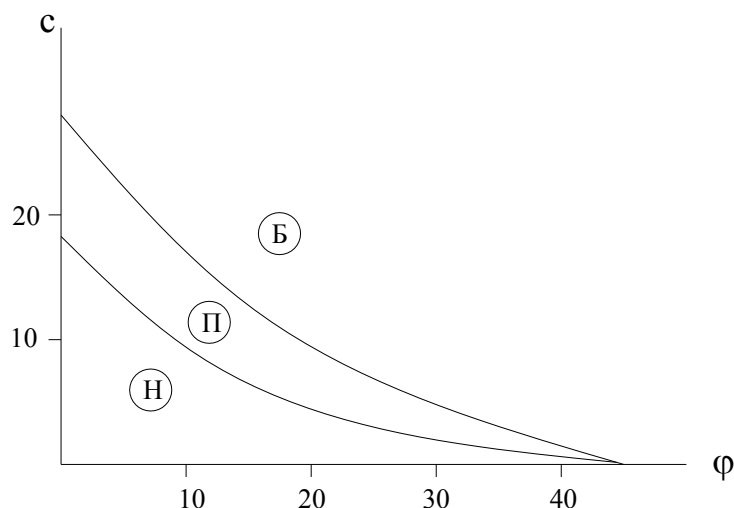


Рис. 4. Диаграмма устойчивости 1-го типа для однородного откоса; состояния: Б – безопасное; П – предельное; Н – недопустимое

Далее, рассматривая различные точки выхода линий скольжения на поверхность в верхней части склона, для произвольной линии скольжения можно установить граничные значения k , характеризующие переход склона из недопустимого в предельное состояние (k_1) и из предельного в безопасное состояние (k_2). Рассматривая различные линии скольжения, исходящие из одной точки поверхности, организуется алгоритм поиска экстремальных значений k_1 и k_2 . Здесь функцией цели будут коэффициенты k_1 или k_2 , а параметрами поиска максимума значений этих коэффициентов – переменные, характеризующие положение

линии скольжения, – радиус и его наклон к вертикали в точке выхода линии скольжения на поверхность в верхней части склона.

Диаграмма устойчивости 1-го типа для неоднородного склона изображается в координатах: коэффициент k (k_1 и k_2) и положение точки выхода линии скольжения на поверхность в верхней части склона l . Два графика, отвечающие экстремальным значениям k_1 и k_2 , определяют границы различных состояний склона. На рис. 5 показан пример диаграммы устойчивости 1-го типа для неоднородного склона. В таблице приведены характеристики грунтов, слагающих склон.

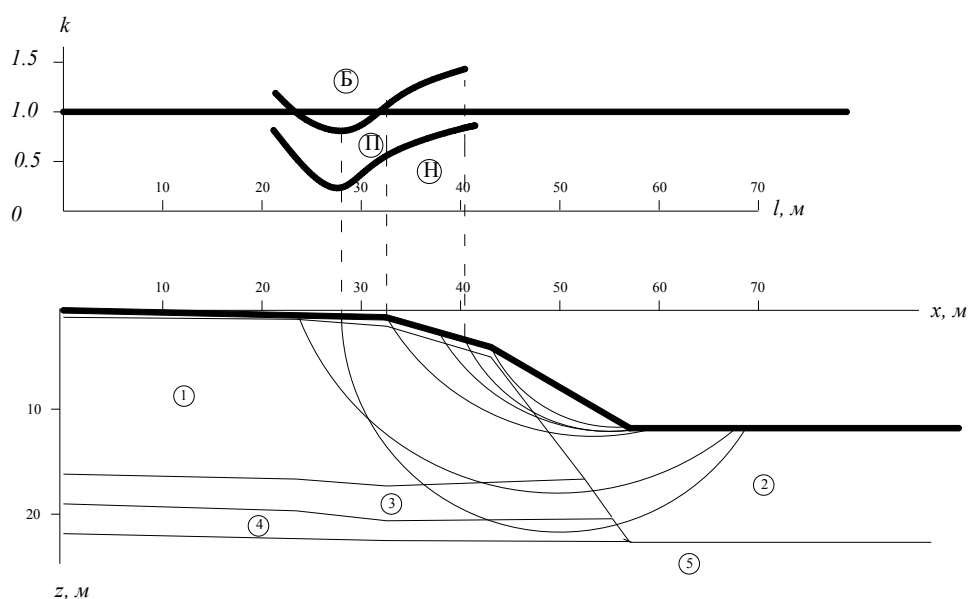


Рис. 5. Диаграмма устойчивости 1-го типа для неоднородного откоса; состояния: Б – безопасное; П – предельное; Н – недопустимое

Характеристики грунтов

Параметр грунта	Инженерно-геологические элементы				
	1	2	3	4	5
γ , кН/м ³	19,4	17,0	18,8	19,3	19,1
c , кПа	5,0	5,0	32,3	6,27	0,21
φ , град	25,0	24,0	19,6	23,4	32,1

Описанные диаграммы устойчивости 1-го типа для однородных и неоднородных откосов и склонов, построенные с помощью сим-

плекс-метода, позволяют выполнять надежную оценку их устойчивости.

Библиографический список

1. СНиП 2.06.05–84. Плотины из грунтовых материалов. М., 1984. 87 с.
2. Справочник геотехника / Под ред. В. А. Ильичева и Р. А. Мангушева. М.: АСВ, 2016. 1048 с.
3. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 240 с.
4. Караулов А. М., Королев К. В. Аппроксимация контура равноустойчивого ненагруженного грунтового склона // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2012. № 3. С. 2–5.
5. Парамонов В. Н. Метод конечных элементов при решении нелинейных задач геотехники: Георекострукция. СПб., 2012. 264 с.
6. Шашкин К. Г., Шашкин В. А., Дунаева М. В. Численное моделирование задач предельного равновесия с помощью упругопластической модели // Геотехника. 2011. № 4. С. 10–23.
7. Соловьев Ю. И. Устойчивость откосов из гипотетического грунта // Тр. НИИЖТа. Новосибирск, 1964. Вып. 28. С. 83–97.
8. Дорфман А. Г. Точное аналитическое решение новых задач теории устойчивости откосов // Вопросы геотехники: Сб. тр. Днепропетровск, 1977. С. 53–57.
9. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М., 1964. 230 с.
10. Караулов А. М. Постановка и решение задачи устойчивости откосов и склонов как задачи линейного программирования // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2005. № 3. С. 2–6.

А. М. Karaulov, К. В. Korolev, Д. А. Nemtsev

Practical Application of Simplex-Method for the Estimation of Stability Homogeneous and Non-Uniform Slopes

Abstract. The technique of stability diagram construction of the first type for homogeneous and non-uniform slopes is resulted. The diagram is under construction on the basis of the stability static analysis which is carried out by a simplex – method, and allows establishing areas of a safe, limiting and inadmissible condition of a soil mass concerning opportunity of its failure. For homogeneous slopes and slopes the diagram of stability of the first type is under construction in coordinates of ground durability parameters of specific coupling and a corner of internal friction. Accordingly, actual values of ground durability characteristics are answered by one of characteristic conditions safe, limiting or inadmissible. Thus the outline of sliding line is accepted as a logarithmic spiral. In case of non-uniform slopes the stability diagram of the first type is under construction in coordinates – position of a point of an output of a sliding line on a surface in the top part of a slope and the attitude of durability parameters virtual values to their actual sizes. Here the outline of a sliding line is accepted as an arch of a circle. The diagram of stability shows a condition of a slope on all its extent.

Key words: slopes; stability; linear programming; a simplex-method.

Караулов Александр Михайлович – доктор технических наук, профессор кафедры «Геотехника, тоннели и метрополитены» СГУПС. E-mail: karaulov@stu.ru

Королев Константин Валерьевич – доктор технических наук, заведующий кафедрой «Геотехника, тоннели и метрополитены» СГУПС. E-mail: korolev_kv@mail.ru

Немцев Денис Анатольевич – доцент кафедры «Геотехника, тоннели и метрополитены» СГУПС.